

Imprimatur,

Edmundus Boldero PROCANCELLARIUS.
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Johan.*
Jo. Pearson Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166$\frac{8}{9}$.





Imprimatur,

Edmundus Boldero PROCANCELLARIUS
Pet. Gunning Præfect. Coll. S. *Johan.*
Jo. Pearson Mag. Coll. S. *Trin.*

Martii 22. 166⅘.



LECTIONES XVIII,

Cantabrigiæ in Scholis publicis habitæ;

IN QUIBUS

OPTICORUM PHÆNOMENΩN GENUINÆ RATIONES

investigantur, ac exponuntur.

Annexæ sunt Lectiones aliquot *Geometricæ*.

'Αρκεῖ, εἰ τὸ μὴ ᾖ χεῖρον. Arist.

Ab *ISAACO BARROW* Socio Collegii *S. Trinitatis*, *Matheseos* Professore *Lucasiano*, necnon Societatis Regiæ Sodale.



LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, & *Octavianum Pulleyn* Juniorem.

M. DC. LXIX.


J.P.
Sc.

SPECTATISSIMIS VIRIS

ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK

ARMIGERIS;

HAS, à VENERABILI VIRO *HENRICO LUCAS* inſtitutæ atque dotatæ, ab ipſis verò optimâ fide, ſummâque prudentiâ adminiſtratæ & conſtitutæ in ACADEMIA CANTABRIGIENSI, PROFESSIONIS MATHEMATICÆ primitias, gratitudinis ac obſervantiæ ergò, devovet

Iſaac Barrow.

Epistola ad LECTOREM.

Benigne Lector,

Minimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerunt auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcircò præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipse primus obiêrim, munus successuris exemplo præire rem literariam; si minùs effectu, saltem conatu promovendi, non inhonesta, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inesse bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; *primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora deflueret; demùm ad promiscui literarii populi instructionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut frustrà futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hìc quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum sperans. Enimverò, quò tibi satisfacerem, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limámque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi. in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituram refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres*

facti-

factitant, à me depulsum partum amicorum haud recusantium nutriciæ curæ commisi, prout ipsis visum esset, educandum aut exponendum. quorum unus (ipsos enim honestum duco nominatim agnoscere) D. Isaacus Newtonus, *collega noster (peregregiæ vir indolis ac insignis peritiæ) exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed & de suo nonnulla penu suggerens, quæ nostris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem nostræ gentis haud immeritò* Mersennum *dixero, cùm suâ tum aliorum operâ provehendis hisce literis natum) D.* Joh. Collinsius, *ingente suo cum labore editionem procuravit. Possem jam alios expectationi tuæ obices ponere, seu veniæ conciliatrices causas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) nisi* Catonis *senioris mordaculum illud in me subverer recasurum:* Rectè si Amphictyonum decreto constrictus hæc evulgas. *Hujusmodi saltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium* στοργὴ *quædam elicuit, ut excusatior is, ac à censura munitior prodiret. sin acrior sis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvìs strenuè reprehendas.*

Epistola;

Epistola; in qua Operis hujus Argumentum, & scopus brevitèr exponuntur.

PErcontaris (amice cum primis charissimè) quid in Lectionibus istis jam prælo subditis præstiterim, aut præstare voluerim. responso facilè defungi possem, ea dicendo præstita videri, quæ singularum initia pollicentur, è quibus insequentium methodus, materiâ, scopus constare poterunt ipsâ delibanti. verùm in summam, opinor, ista contrahi vis, & sub unum aspectum redigi. id quidem ægrè possum, nisi (quod juxtà fastidiosum ac longum esset) complura *Theoremata* recitando; sed utcunque morem tibi geram, rerum capita succinctè perstringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tractandam suscipio, *Opticæ* partem aliquatenùs promoveam, ejus imprimìs principia explicando; tum ab ipsis *Utilia Consectaria* deducendo; demùm præcipuos (quos animadverteram) defectus supplendo, nec non *vulgatos errores* corrigendo. huc collimans, speciatim primò receptas hypotheses ad examen revoco, quatenus admittendæ sunt & quomodò rectiùs intelligendæ edocere studens; tum è physicis uerisimilibus causis ipsas eliciens ac astruens. quâ in parte mihi fidei multum attribui nolim; quæ probabiliora mihi visa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipse magnopere confidam. valeant quantum valere possunt. Saltem hypotheses ipsas admitti peto, ceu experientiæ consentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes. Hypothesibus constitutis, ab iis proximè generalia

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonſtrationibus firmata appono) partim à me obſervata. dein ad ſpecialia progredior, id mihi negotii ſumens, ut *Catoptricæ*, ac *Dioptricæ* utriuſque, in uſu maximè poſitæ (*planæ* ſcilicet & *Sphæricæ*) potiſſima pertractem *In Catoptrica Sphærica* (ſiquidem plana jam olim verè ſatìs, ac fusè exculta habetur) ejuſmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum interſectiones atque limites innoteſcunt; unáque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; reſpectu oculi nedum in radiationis axe, ſed extra ipſum ubicunque conſtituti. quæ certè vel nuſquam (quod ſciam) aut magnâ ex parte perperàm alibi tractata proſtant; id quod, incidentèr aliorum refutans ſententias, cùm ratiociniis perſpicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam *planam quàm Sphæricam*, refractionis noviſſimâ præſtratâ lege vel hypotheſi (quam *illuſtris Carteſius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter aſſignatas alicubi rationes veritati conſonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiſerunt, ipſum hactenus quiſquam (in ſcriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hîc autem imprimìs puncta radiantia longè diſſita (ſeu quaſi parallelos emittentia radios) conſiderans, quo pacto ab ipſis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua *refractorum ſymptomata* liquent, ipſorum interſectiones ac limites dignoſcuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca deſignantur, tam oculi reſpectu qui in axe, quàm ejus qui uſpiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta ſenſibiliter vicina, ſeu divergentibus radiis allucentia. ſub extremum, quò paratior ſit horum uſus,
punctorum

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines singillatim exhibeo determinatas. Hisce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (istis nempe, quæ hujusmodi consequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum posteà specialiùs ac uberiùs planorum objectorum imagines quales sunt, & quomodò designandæ commonstro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hisce passim alia πάρεργα interspergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.



Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc subjungitur interpretatio.

A + B. *hoc est*	A *&* B *simul accepta.*
A — B.	A, *demptâ* B.
A —: B.	*differentia ipsarum* A, *&* B.
A × B.	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$ —	A *divisa per* B, *vel applicata ad* B.
A = B.	A *æquatur ipsi* B.
A ⊏ B.	A *major est quàm* B.
A ⊐ B	A *minor est quàm* B.
A . B :: C . D	A *ad* B *eandem rationem habet, quam* C *ad* D.
A, B, C, D ∺.	A, B, C, D *sunt continuè proportionales.*
A . B ⊏ C . D.	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A . B ⊐ C . D.	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A . B -|- C . D { = ⊏ ⊐ }	M.N. *Rationes* A ad B, *&* C ad D *compositæ* { *adæquant* *excedunt* *deficiunt à* } *rationem* M ad N.
Aq.	*Quadratum ex* A.
√A.	*Latus, vel radix quadrata ipsius* A.
Ac.	*Cubus ex* A.
√Aq + Bq.	*Latus compositi ex* Aq *&* Bq.

Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præsertim in analysi tantillùm versatus.

Lect.

Lect. I.

I. PRæfatorio jam vinculo solutus, & scopulum prætervectus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus accingor. Imprimis autem novi quod interim consilii rationem, paucis expediam. Cùm prius institutum urgens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentionem desiderantia, nec ex improviso auscultantibus, indè satis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam attrectantibus haud posse declinari; constitui, derelictâ tantisper istâ, protinus in amæniores (floribus nempe Physicis depictos, & fructibus consitos Mechanicis) mixtæ quam appellitant Matheseos Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Cosmographiæ, reliquæ cujuscunque, prout occasio feret, & commodum videbitur. Neque tamen animus erit ullius ex his longè diffusa latifundia pervagari, vel extremos fines circumire; sed ad ejus quasi metropolim è vestigio rectà procedere; primas tantum hypotheses excutere, præcipuáque (quibus illa tam vasta theorematum moles incumbit) fundamenta denudare; tum verò nonnulla, palmaria quidem illa, statim emergentia corollaria subtexere. Quorum certè σκέψις jucunda præsertim, utilis, & fructuosa videri potest; quum è principiis rectè positis, probéque perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehensio subnascantur.

Præcesserat anteloquium occasioni, quæ fuit, adaptatum.

II. Ab Optica sumemus exordium; scientia cum primis Nobili; quam cùm peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam Naturæ simul detegendis arcanis, ac explicandis Phænomenis minimè vos latet quantopere conducat; neque minùs ad Astronomicas rationes quàm planè necessaria sit; ut Perspectivam, Picturam, & his agnatas alias eximias Artes taceam; quæ totæ quantæ quantæ sunt ab ea pendent, ac principia sua mutuantur. Ut & prætercam qualia, certè vix pretio

ſuo æſtimanda, ad vitæ communis uſum beneficia ſubminiſtret; viſûs imperfectionibus & vitiis tam prompta, quàm certa, minimi ſumptûs, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curioſiſſimus iſte ſenſus noſter ità varias indies, ità miras rerum ſpecies exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes noſtras afficere poſſit, unde talis emergat apparentiarum diverſitas, & quis ſit illas attingendi modus nedum accuratè, certóque cognoſcere, ſed utcunque veriſimilitèr arbitrari; præſertim quum in nullâ parte noſtri, nec in tota fortaſſis rerum compage, neceſſitatibus, commodis, & voluptatibus noſtris proſpicientis melioris naturæ ſeu fines agendi, ſeu modos pleniùs queamus perſpicere; nuſquam adeò diſtinctiùs aut apertiùs opificis πανσόφυ eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potiùs ipſam aggrediamur.

III. Quæ circa viſum occupatur diſciplina communiter in tria membra diſpertitur; primum, quod viſus directis radiis objecta cernentis affectiones conſiderat (hoc ſpeciatim Optice nominatur;) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercuſſu oriundas ſpeculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum;) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia cauſas inveſtigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diverſa media tranſlucentibus, & eorum occurſu demutatis. Quam diſtributionem ut non improbamus, ità nobis haud obſervandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia ſunt, at præcipuè quia viſio quævis, ut libet ſimplex ac directa, ſicuti reverà non abſque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ità nec eâ ſeclusâ penitus intelligi poteſt aut explicari. Igitur hujuſmodi methodo potiùs inſiſtendum cenſemus; ut nempe primò viſionis cauſas (quæ ſcilicet illam extrinſecus efficiunt, aut afficiunt) examinemus; tum ut videndi modum (hoc eſt quo pacto ſenſus hic noſter idoneis organis inſtructus iſtis concurrentibus cauſis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam ſelectiora ſuſcipiamus elucidanda; poſtremóque forſan, ut de viſûs remediis ac ſubſidiis aliquid ſubjungamus.

IV. Viſionis cauſas externas quod attinet, nemini jam dubium eſt, exiſtimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emiſſione, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculoſque percellente viſum effici; quod &

Democrito

Democrito jam olim, ejúsque sequaci (dicam an simio?) suboluerat *Epicuro*. Quod sanè malim adsumere, vel supponere, quam post tot alios operoso nisu comprobare. Certè (quo brevissimè tangam hanc quæstionem) sic in alia qualibet evenit sensione, (quidni pariter in visu?) non ut sensus in objecta feratur, sed ut ipsa se sensibus imprimant; immediato nempe contactu, vel medii cujusdam seu projecti, seu commoti interventu. Tum ratio vetat, ut ex ocello quicquam in immensam adeò circumquaque distantiam credamus emanare; neque quod sic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enimverò pellucidis humoribus aut membranulis constat opacis, ad transmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptissimè, sed ad progignendam à se vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd si lucem ipse profunderet, insitísque radiis attingeret objecta, quidni densissimis in tenebris hoc præsertim faceret, & feles vel (Historicis si placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indispensabilis ad visum necessitas esset? συναυγῆας equidem Platonicæ. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo sitis, circumfusas species quas vocant, ad oculos deportari, suíque perceptionem efficere, cùm à speculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciæ quidni commodissimè visionem adscribamus? satis hæc illam quam adsumimus vulgarem jam hypothesin adstruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa visum afficiant diversimode, puta lux, lumen, dies, crepusculum, colores, rerum imagines, phasmata; nec tamen absque luce. (Præsente nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perspicuum est lucis hìc præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem sedulò pensitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diversimodâ lucis unius operatione putemus proficisci. Cùm nempe lux sit illud quicquid sit quod à corpore lucido (quale stella, ignis, flamma) proveniens immediatè visum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuscula quædam opaca (seu lucem non penitus excipientia) τῷ ἀέϊχονη interspersa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes resiliens; quæ scilicet in oculum itineri suo expositum tumultuariè delapsa confusam quandam apparentiam excitat; quàm, si fortior sit, eique prorogandæ lucens præstò sit, appellamus diem; at si debilior fuerit, ejúsque fons abscesserit, crepusculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

majuſculis, & aliquatenus ſtabilem ſuarum partium ſitum retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, diſpoſitione, textura, hoc vel illo modo) detorta, vel utcunque repercuſſa; nimirum ut ejuſmodi corporibus illapſa lux vel motu ſuo, vel agendi virtute, vel ipſâ quantitate ſuâ (quoad raritatem intelligo, vel denſitatem; radiorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi diſcrimine diſpares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus inſignimus. Imagines autem nil planè ſunt aliud, quum lux ab objectis ità reflexa, vel refracta, ut rurſus in unum locum, talémque recolligatur ſitum, qualem tunc obtinuit, quum ab originali profluerет objecto; directóque verſus oculum itinere procederet; quo fit ut ſimiliter objecta, ſed tanquam alibi collocata repræſentent. Phaſmata deníque ſunt imaginum quaſi colores, pro lucis diverſa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem affectione diverſa variati Craſſiuſculè jam iſta proponimus; quorum forſan aliqua ſaltem in dicendorum progreſſu magis eluceſcent.

VI. Cùm itáque lux in viſione peragenda, diverſiſque procreandis apparentiis ità quaſi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud ſenſum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò diſpiciendum venit. Et ejuſce quidem de natura à Phyſicis magnoperè deſceptatur; an puta ſit corporea quædam ſubſtantia, an qualitas; an actio tantùm, aut motus quidam; de productione quoque conſequentèr ejuſdem, & propagatione diſquiritur, utrùm continuo per medium tranſitu, vel medii duntaxat impulſu, vel ſuâ ipſius multiplicatione quâdam huc propagetur; quales ego quæſtiones curioſè non eventilabo. Quod iſtam ſaltem ſententiam attinet, quæ lucem accidentium claſſi accenſet; quando veris corporeis effectibus (quales ſunt rectâ progredi, repercuti, refringi, calorem excitare, ſenſum afficere) veræ ſubſiſtentes cauſæ, veri locales motus aſſignari debeant; neque quomodò meræ qualitati, vel accidenti cuipiam iſta competant intelligere mihi datum ſit; quinetiam quo ſeſe pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perſcrutantibus Philoſophis haud pauci ſe parùm capere profiteantur; eam haud dubitem hìc miſſam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπόρροιαι, de lucidi corporis viſceribus emanantes, totúmque nobis & ipſi interjectum ſpatium quàm perniciſſimè tranſcurrentes lucem conſtituant; vel an illa potius nihil ſit aliud quàm ipſius lucentis actio, contigua ſibi corpora prementis ac impellentis, iiſque mediantibus alia, quæ adjacent; tum & horum interceſſu rurſus alia proximè ſuccedentia;

cedentia; nec non ità perpetuâ deinceps ad nos deductâ serie; vix ausim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut censeam utroque subinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulsum; satiúsque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cùm ad quantum intervallum undiquaque protensum exiguæ lampadis flammula se vividè conspiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpositum medium perfundi compleríque videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu suppeditandæ profluviorum copiæ par sit; quomodo dum ea profundit non ipsum plusquam exhauriatur, & confestim evanescat, haud facile capio. Cum verò rursus lucis inflectiones, illásque qui consequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulsus facit satis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præsternam expedit, iis quas mox tradam hypothesibus nonnihil explicandis congruum; hoc se modo, vel non absimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem esse quandam corpusculorum ultrà pene quàm cogitari potest minutorum & exilium; horum autem unumquodque vehementissimo motu percitum, aliquò (secundum legem istam naturæ satìs receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumstare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaversùm liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exilissimis quidem & illis, ast priorum respectu bene crassis & solidis; ità tamen ut hoc meatus habeat, & interstitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum crassiorum corpusculorum occursu progressum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi superficie versantur, aut ab ea ruunt corpusculis; ut necesse sit iis sic inhibitis, atque repulsis introrsum se recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiam in eam aliunde confluentibus ejusdem naturæ corpusculis) aliquatenus intra suos cancellos restringatur, nec toto statim in auras expansa dissipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ cursum suum rectà continuare, materiam inibi deprehensam haud ità fortiter obsistentem in fugam agentia,& ante se protrudentia; quorum vestigiis alia de lucido corpore similiter prodeuntia prorsus insistent, longúmque simul omnia lucis rivulum efficient, indeflexâ serie procurrentem. Quin & istorum fortè nonnulla memoratas medii crassiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipsas quoque cedere cogant, & secum conspirantes in directum adja-

centia

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ità continuò, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneum, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; at si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujúsque proinde materia vel promptiùs cedat, aut contumaciùs obluctetur, oportebit illius seu cursûs, seu impulsûs vim, effectúmque demutari; quin & si novi medii superficies ità transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀνάκλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compactæ, ut venienti transitum perneget, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliet; aliò vim suam quàm retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibimet incurrentem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quòd si verò materia luci progredienti sic obviàm facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentiùs tamen aut paratiùs præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantùm hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modóque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ὁλοσχερῶς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesibus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cùm & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjungemus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII.

VIII. 1. Radii lucis (hoc est lucidi transitûs aut impulsûs quales descripsimus tramites) in eodem existentes similari medio directi sunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin indè Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipsam, Physicéque loquendo figurà prismaticos esse, vel cylindricos. Nempe corpusculum illud quodpiam in lucidi superficie positum, à quo radius originem suam ducit, dum à primò suo loco ceu base defertur aut totâ suâ superficie contiguum sibi corpus rectà propellit, figuræ suæ (vel impulsi saltem corporis figuræ) congruum designat, super hac vel illa base constitutum, solidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut prisma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, istos radios pro rectis lineis habere possumus; tum quia reverà sunt adeò tenues & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejusmodi seu prismaticis figuris ipsarum axes ità sumi possunt, ut nihil indè ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illustrati) puncto ad quodvis medii (non obstaculis intercisi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritissima suppositio quò vel intelligi vel admitti possit, omninò duplicem limitationem exigere videtur, è supra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præcisè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Physicam; verùm saltem admodum exiguam, qualíque ferme minorem vel animo designare nequeamus; alteram ut non in unoquoque strictè dicto temporis instanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, sed ut nullum temporis intervallum sentiri possit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipsum à quavis lucidi designabili parte designatam ad medii partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cùm radiorum istæ quas assignavimus radices, lucidum componentia corpuscula, sint illorum, quorum nos utcunque quantitates sensu vel animo pertingerè valemus, corporum respectu tanquam infinitè parva, nec non infinità quasi pernicitate donata, non difficilè concipi potest in omni designabili, vel imaginabili lucentis spatiolo prorsus innumerabilem eorum multituditudinem existere, quorum fere singula diversas in plagas tendunt; ut nulla sit designabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam saltem, utlibèt imperceptibilis & angusti, temporis moram interponendo. In eo siquidem tempusculo lucidi partes singulas innumera successivè talia corpuscula subingrediuntur juxta deseruntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad designatum medii spatium tendat, sibi transmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tanquam

quam infinitos ſupponere fas eſt) idoneum reperiens. Ità vulgare pronunciatum interpretor; id quod aliàs rigidè ſumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diverſas in partes contendere, vel adniti; ſed nec eandem præciſè medii partem è diverſis locis accedentes corporum motus excipere quiſquam conceperit, opinor, aut ego conceſſerim; non certè magìs quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura ſimul corpora ſuſcipere; ad iſtum modum intellecta dicta ſuppoſitio totam unà cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Phyſicam permiſcebit. In noſtro rem explicandi modo nihil durius obverſari video, quàm ut hinc divinæ potentiæ, ſapientiæque vis magìs eluceſcat, in luce ſic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehenſibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorſus ei neceſſariæ fuerunt, ut ſenſionem efficeret, & reliqua tam utilia ei deſtinata munia obiret. Sanè lucis corpuſculum unum ab arenula quavis litorea pluſquam eâ fortaſſis proportione ſuperatur, quâ tota quanta quanta eſt mundana moles arenulam iſtam excedit; id quod non ità cenſebit abſonum, quiſquis ad complures ſatìs obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum eſt porrò duas has fundamentales hypotheſes, ſic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illuſtrati quæcunque deſignabilis particula conſpicitur oculo, repræſentatur in ſpeculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò ſtatim oculo ſubducitur, & penitus obumbratur, ſi quid opaci corporis directum intercipiens radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum ſufficit trajiciendis radiis quibus tota quantivis objecti facies obverſa depingatur. Et porrò quam nullà poſſit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perſpiciliorum uſus apertiſſimè monſtrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectà progreditur, ſiquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc eſt in ſe, vel in ſuam retrò ſemitam) repellitur. Experientiâ firmatur hæc hypotheſis; & rationi quoque conſentanea eſt; nec enim ulla poteſt excogitari cauſa, cur in unas potiùs quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò ſi verum ſit omne patiens, aut percuſſum vim inferenti poſitivâ quâdam vi repugnare, perſpicuum videtur eò reſiſtentiam dirigi, unde vis ingruebat; ejúſque conſequenter effectum abſolutè loquendo, tantùm illic deprehendi.

deprehendi. Quod ſanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipſam hypotheſin ad omnimodos incurſus extendere; ſeu generatim effari, quod pulſus omnis & motus, utcunque medio culibet impingens, directè (per ſe nimirum, propriè, diſtinctéque rem æſtimando) continuatur, aut prorſum aut retrorſum. Scilicet, exempli cauſâ, ſi duo baculi A B Y Z, C D Y Z in idem medium E F (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quâdam preſſione vel impetu adigantur, exiſtimo medii ceſſione vel reſiſtentiâ totam (quâ baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectâ ſemitâ antrorſum verſus I K, vel retrò verſus C D derivari, ac perpendicularis ipſius impetus in G H progreditur, aut regreditur in A B. Quod enim nonnulli putant medii ſuperficiem baculi perpendicularis tendentiæ magìs opponi, quam obliqui, proindéque perpendicularis impulſum rectà continuari, ſed obliquum alio detorqueri; vel aſſertionem ipſam non agnoſco, vel non admitto conſequentiam. Enimverò ſi per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, ſeu obſtare rectà pergenti, non minùs eo modo ſuperficies E F opponitur baculo C D, quàm ipſi A B; rectum enim ejus progreſſum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm ſi quam aliam neſcio quam imaginariam oppoſitionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè conſectari. Profectò rem abſtractè, nec ut accidentarium quid immiſceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem conſiderare præter illam, ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim ſola reſiſtendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam D Z progredienti impulſui ſolùm punctum Z opponitur; perindéque fuerit qualem reliqua medii ſuperficies obtinere ſitum concipiatur. Punctum autem Z æquè pulſui venienti à D per rectam D Z, atque tendenti per rectam Z K verſus K contrariatur, ac ei qui à B per B Z procedens iter affectat per Z H verſus H. Idémque de reliquis medii punctis intelligi par eſt, quibus uterque baculus ipſum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriuſque pulſûs quoad oppoſitionem eſt ratio; ſimiliſque proinde utrobique reſultabit effectus; pulſum nempe recto tramite vel tranſmittere, vel rejicere. Verùm longè ſecùs eveniet, ſi baculum alterum obliquum, ſeu P D Y Q, cum ipſo A B Y Z conferamus. Etenim ſuperficies E F baculi A B Y Z motui, vel impulſui magìs opponitur, aut obſiſtit, quàm motui vel impulſui baculi P D Y Q. Quoniam illi toti cum tota ſui parte Y Z, huic verò tantum ex parte Y renititur; è qua diſcrepantia neceſſariò diſpar effectus conſequetur, ut nimirum pulſûs aut motûs directio mutetur. Quòd diſcrimen eò lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adſimili) lucis radios

Fig. 1.

dios diverso medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; saltem eò spectantia lucis præcipua symptomata, tribus porrò subjiciendis hypothesibus comprehensa, vix aliâ ratione commodiùs explicari.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc subinde generali nomine, compendii causâ, tam refractionem, quàm reflectionem complector) fit in superficie ad medii inflectentis superficiem perpendiculari, seu recta. Hujusce suppositionis haud ullam facilè satis commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehensibili quâdam obscuritate laborat quicquid fermè eò spectans afferunt; neque valdè miror radium lucis semper ut rectam concipientibus individuam lineam id eis accidisse; quo posito vix probam ullam ejusce rei causam assignari posse credo. Cadat enim radius linearis A B in speculi (instantiæ gratiâ) plani superficiem ad punctum B; per quod utcunque ducantur duæ rectæ C D, E F; cùm igitur rectæ A B, C D sint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in isto plano? Simili ratione quoniam rectæ A B, E F sunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obstat quo minùs in singulis omnibus, hoc est infinitis planis, speculi superficiem secantibus, & per rectam A B ceu communem sectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus dispergatur? cur hoc fieri non possit, utique non capio. Quod respondetur enim, posito plano A B C ad speculi superficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis speculi superficiei contrarium esse, proindè resistentiam in eo maximam contingere, proptereáque radium in eo potissimùm inflecti, parùm satisfacit; quoniam, ut superiùs insinuatum, extra punctum ipsum B, cui radius impingit, alia nulla specularis superficiei pars meritò venit consideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in universam quà longè latéque distenditur, ipsius speculi superficiem agit hic linearis radius, & ab ea vicissim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patitúrque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quousque procedet operatio? quinimò potiùs, quia radii per rectam A B procurrentis impulsui tantùm id speculi quod est in recta A B versus G protracta resistit, ideò pulsus in ipsam A B rejicietur; Et nulla succurrit causa sontica, propter quam aliorsùm deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam aliò determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ assignantur, hujus effecti causis excutiendis abstineam, indè genuinam ejusce rationem (ut & generatim omnium

quæ

Fig. 2.

quæ circa radiorum inflectionem primitùs obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verùm dimensionibus omnimodis præditum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum ABCDEFGH lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cujus latus BF applicetur speculo, dum interea reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogrammum ABFE, nè recta procedat; indè continget rectam BF aliquò supra dictum planum resilire. Verùm in allas saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cùm enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuáque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cùm inter plana latera ABDC, EFHG sibimet opposita cursus ejus anteà dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obstet, quo minùs inter eadem plana, tametsi sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri; locumque seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterùm est planum ABDC, eíque oppositum EFGH speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideò lateralis recta BF in speculi plano existens, planis ABDC, EFHG recta. Quocircà si totum hoc Paralleledipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura præditus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producetur, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostendetur subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus ABDC; cujus bases AMCN, BODP, axis XZ; ità scilicet, ut basis BODP speculi planum contingat in B; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri BD, PO sese normaliter secent; ac per ipsam PO, & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum POMN. Si jam per hujusce latera MO, NP ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrúmque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta GBH communis sectio circuli BODP, planíque

Fig. 3.

Fig. 4.

ſpecularis; hæc utique circulum continget; (quia ſpeculi planum, ex hypotheſi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeóque nec recta G H) quare rectæ G H, O P ſunt parallelæ. Ergo P O eſt ad ſpeculi planum parallela. Huic verò perpendicularia ſunt plana prædicta cylindrum contingentia per M O, N P ducta; axi parallela. Quapropter eadem ſpeculi plano recta erunt. Hinc, ut anteà, ſi totus radius habeatur inſtar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in ſuperficie ad ſpeculum planum recta; quippe cùm ejus latitudo tota comprehendatur inter ejuſmodi duo plana; quæ proinde ſi nulla ſupponatur, in unum illa coaleſcent. Accommodari poſſent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem ſupra deſcripſimus, utcunque nonnulla demutando; ſed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

LECT. II.

I. VIæ, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingreſſi ſumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheſes (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginúmque proinde locis, figuris, quantitatibus inveſtigandis, nec non apparentiarum quarumcunque cauſis explicandis) neceſſarias, experientiæ quidem bene conſonas illas, etiam aliquo rationis ſuffragio communire; præſtratis utique fundamentis, ac ſuppoſitionibus inſiſtendo. Cùm itaque lucis radio corpus adſignatum ſit figurâ priſmaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis ſimplex, & naturæ totas ſuas in agendo vires exerenti præſertim conveniens;) cùm & exinde progreſſus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra ſuperficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur; quas quidem abhinc (quando nullus tranſverſæ dimenſionis illius, vel intervalli ſuperficies iſtas dirimentis ad rem noſtram, illam ſaltem quam nunc attingimus ſpectans effectus, aut uſus ſit) brevitatis & perſpicuitatis cauſâ, velut unam habere poſſumus; adeóque jam radium ut duabus ſolummodò dimenſionibus præditum, & ad inſtar Parallelogrammi cujuſdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis ſuperficiem recto jacentis, conſiderantes, reliquam itineris quod perſequitur determinationem, ultimam

mam illam & completam, investigabimus, ac exponemus; cujusce quidem circa reflectionem inquisitionis consectaria resultabit hæc propositio, passim ab Opticis recepta :

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad speculi, vel opaci reflectentis superficiem angulos constituunt æquales.* Hujus effati declarationem sic exequimur. Parallelogramum rectangulum A B C D lucis repræsentet radium obliquè plano speculo E F incidentem. (Recta scilicet E F sit communis sectio plani ad speculum recti, in quo dictum Parallelogrammum existit, & in quo, secundum præmissa, reflectio peragitur, cum plano speculi.) Cùm itaque Parallelogrammi punctum B speculo primùm impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præstruximus) retrò versus A per ipsam rectam B A resilire. Cùm autem intereà rectæ B D supra speculum eminentis alter terminus D, nullo præpeditus obstaculo pari vehementiâ cursum quoque suum adnitatur promovere per rectam C D H; palàm videtur utriusque conatibus adversis non aliter faciliùs aut propiùs satisfieri posse, quàm si utrumque circa punctum Z rectæ B D medium rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent cursu deflectent; siquidem rectæ B A, D C circulum B β D δ tangunt, centro Z per B & D descriptum. Cùm autem hujusmodi motum circularem obeundo punctum B descripserit arcum B β, & punctum D arcum D δ, hoc est quando recta B D obtinuerit situm $\beta\delta$, etiam ipsum punctum D speculo impinget ad δ; reditúmque proinde per arcum δ D, scilicet ipsius quoque jam intercisо cursu, molietur; Sed & nunc temporis ipsum punctum B ad β positum per arcum β D tendit; quorum certè motuum adversantium alter alterius effectum impediet; itáque proximo saltem, quoad fieri poterit, utrumque progressus arripient; proximi verò sunt qui per tangentes $\beta\alpha$, $\delta\kappa$; qui & sibi nihil repugnant, at potiùs omninò secum conspirant; itaque punctum B per rectam $\beta\alpha$, punctúmque D per rectam $\delta\kappa$ procurrent, adeò ut totus radius A B D C jam acquirat situm $\alpha\beta\delta\kappa$; & per hanc orbitam rectà motum suum prosequatur. Liquet autem angulos ABF, $\kappa\delta$E æquari. Nam æquantur anguli Z B δ, Z δ B; quapropter adjunctis hinc indè rectis ZBA, $\beta\delta\kappa$ toti A B F, κ δ E pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis residuos A B E, κ δ F æquari; quod propositum fuit ostendere. Fig. 5.

III. Ità de præmissis suppositionibus nostris fundamentalem hanc Catoptricæ legem seu regulam elicimus, quàm verisimiliter aut concinnè

cinnè penes vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod superest partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranisμmum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

Fig. 6.

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D δ; punctum B tardiùs

tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum B ϐ delineet; quibus peractis recta BD tenebit situm ϐδ. Cùm verò jam punctum D densius quoque medium interet ad δ; proindéque pariter & ipsum retardetur; motus isti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velociùs feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs simul arcum describet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deserentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δκ, ϐα; radiúsque totus ABCD hoc modo detortus, & situm αϐδκ nactus per hanc posteà semitam rectà decurret. Adnotandum est autem quæcunque sit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D δ, B ϐ (vel semidiametros Z D, Z B) eandem semper habere proportionem inter se; talem nempe, qualem in densitate, seu resistentia peculiare discrimen exigit. Etenim supponatur in quovis superficiei pellucidæ loco positum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypothesi sit homogeneum (hoc est ubique pariter obsistens) nulla potest, opinor assignari ratio cur hoc mobile non in quasvis partes æquâ velocitate deferri possit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit isthàc dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino resistentiam invenient; punctum, inquam, B, seu versus Q, seu versus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio semper eâdem, quæcunque fuerit ejus positio, celeritate promoveatur, satis apparet motus istos, aut motuum semitas eodem tempore decursas, arcus nempe circulares D δ, B ϐ semper eandem inter se proportionem servare; nimirum illam, quam habent semidiametri Z D, Z B, vel Z δ, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem esse patet cum illa, quam habent recti sinus angulorum ipsis Z δ, Z B in triangulo Z δ B oppositorum, ipsorum scilicet Z B δ (vel Z B E) & Z δ B. Est autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc est angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z δ B est complementum anguli F δ κ, vel inclinatio rectæ δ κ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propositum. Patet verò, quod in hoc casu, angulus E B Z major est angulo B δ Z; vel, ductis B M, δ N ad E F perpendicularibus, quòd angulus M B G major est angulo N δ κ; adeóque quòd hic refractio versus perpendicularem, quod aiunt, contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium transit, ipsi magis obsistens, seu densiùs. At si medio incurrit faciliorem transitum præbenti, seu rariori, planè simili modo, sed inversè se res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod

cinnè penes vos esto judicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod superest partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potiùs ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniam incitato cursu tendens ulteriùs ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibimet adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, motúsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranisмum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc indè quàm tardissimè dimotis extremæ velociùs revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicam in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

Fig. 6.

IV. 6. Radii lucis alteri cuipiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ità refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinubus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabiliendóque decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium repræsentans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardiùs quidem, attentabit per rectam B G, seu peripsam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardiùs, hoc velociùs incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ità scilicet ut dum punctum D in medio rariori (rarius appello quod minùs resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiorem reddit) velociùs latum describit arcum majorem D δ; punctum B

tardiùs

tardiùs in medio contumaciore delatum minorem arcum B ϐ delineet; quibus peractis recta B D tenebit situm ϐδ. Cùm verò jam punctum D densius quoque medium interet ad δ; proindéque pariter & ipsum retardetur; motus isti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum D velociùs feretur quàm B; nec ideò majorem ut priùs simul arcum describet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deserentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes δκ, ϐα; radiúsque totus A B C D hoc modo detortus, & situm αϐδκ nactus per hanc posteà semitam rectà decnrret. Adnotandum est autem quæcunque sit rectæ A B ad rectam E F inclinatio arcus D δ, B ϐ (vel semidiametros Z D, Z B) eandem semper habere proportionem inter se; talem nempe, qualem in densitate, seu resistentia peculiare discrimen exigit. Etenim supponatur in quovis superficiei pellucidæ loco positum nobile punctum B; cùm medium hoc ex hypothesi sit homogeneum (hoc est ubique pariter obsistens) nulla potest, opinor assignari ratio cur hoc mobile non in quasvis partes æquâ velocitate deferri possit; nimirum æquè celeriter ad Q tendet, (impetum modò ceperit isthàc dirigentem) per rectam O B Q, ac in N per rectam A B N. Adeóque radii lucidi A B, O B utcunque differenter inclinati parem omnino resistentiam invenient; punctum, inquam, B, seu versus Q, seu versus N nitatur, æqualiter, eodémque modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum D in primo medio semper eâdem, quæcunque fuerit ejus positio, celeritate promoveatur, satis apparet motus istos, aut motuum semitas eodem tempore decursas, arcus nempe circulares D δ, B ϐ semper eandem inter se proportionem servare; nimirum illam, quam habent semidiametri Z D, Z B, vel Z δ, Z B; quæ idcirco proportio, principaliter ac primariò, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem esse patet cum illa, quam habent recti sinus angulorum ipsis Z δ, Z B in triangulo Z δ B oppositorum, ipsorum scilicet Z B δ (vel Z B E) & Z δ B. Est autem angulus Z B E complementum anguli A B E, (hoc est angulus inclinationis rectæ A B ad E F) & angulus Z δ B est complementum anguli F δ κ, vel inclinatio rectæ δ κ ad eandem E F. Igitur abunde liquet propositum. Patet verò, quod in hoc casu, angulus E B Z major est angulo B δ Z; vel, ductis B M, δ N ad E F perpendicularibus, quòd angulus M B G major est angulo N δ κ; adeóque quòd hic refractio versus perpendicularem, quod aiunt, contingit. Ac ità quidem quando radius radius in medium transit, ipsi magis obsistens, seu densiùs. At si medio incurrit faciliorem transitum præbenti, seu rariori, planè simili modo, sed inversè se res habet.

Fig. 7.

Fig. 8.

Quod

Quod (licèt breviùs) conficeretur negotium adſumendo ſicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* eſt via, ità radium de raro tranſeuntem in denſius, perque denſius veſtigia ſua replicantem in rarum nil aliud quàm eandem ſemitam repetere; ut nempe ſi radius A B D C de raro tranſiens in denſius refringatur in α ϛ κ δ; quòd etiam hic radius α ϛ κ δ è denſiori recidens in rarum viciſſim in A B D C refringetur; quia tamen aſſumptum illud non nemini demonſtrationis & ipſum indigere videatur; Et univerſim, extremóque rigore ſumptum forſan haud adeò verum ſit; majoris etiam evidentiæ cauſâ; preſertimq; demùm quoniam huic caſui nonnulla quodammodò peculiaria ſunt notatu non indigna; quin addo quia præſtare videtur effectum unumquemque propriis è cauſis deduci) ſeparatim oſtendemus. Rurſum igitur radius A B D C, quâ prius figurâ donatus rarioris medii ſuperficiem E F incurrat. Cùm igitur punctum B velociùs procedere jam valeat quàm anteà (medio ſcilicet illapſum promptiùs cedenti) hoc eſt quàm punctum D, neceſſariò commutabitur rectus utriuſque, quem affectant, motus in ei proximum circularem, circa punctum aliquod in recta B D, puta circa Z; ità ut Z D, Z B talem inter ſe proportionem obſervent, qualem ſingularis exigit horum in reſiſtentia mediorum diverſitas; utique ſicut in quæ præceſſerunt; cùm verò punctum B ità circumductum deſcripſerit arcum B ϛ, & punctum D arcum D δ; puncto D ad δ tunc medium rarius ingredienti, ceſſabit iſta motuum inæqualitas; adeóque ſimul neceſſariò deſinet rotatus circa punctum Z; ambóque puncta B, D per dictorum arcuum tangentes ϛ α, δ κ (rectæ Z ϛ perpendiculares) quod proximum eſt iter arripient. Rurſus autem, pariter ac in caſu præcedente, rectæ Z D, Z B (vel Z δ, Z B) proportionem exhibent, quæ refractiones hujuſmodi dimetitur; habent autem Z δ, Z B ſeipſas, ut recti ſinus angulorum Z B δ, Z δ F; hoc eſt ut ſinus inclinationis rectæ A B ad ſinum inclinationis rectæ δ κ; quod propoſitum fuit oſtendere. Liquet autem quòd hìc ang. Z δ F major eſt angulo Z B δ, adeóque quod refractus divergit à perpendiculari.

Fig. 9.

V. Advertendum eſt porrò quoad priorem hypotheſin, ſeu caſum radii de medio rariori contendentis in denſius, eum ſemper, qualiſcunq; ſit ejus obliquitas, medium denſius ſubire; & per ipſum incedere; modo commonſtrato. [Simpliciter autem hoc, & abſtractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia ſunt, opacitas perſpicuitati immiſta, figura diaphanum terminans, ejus craſſities inæqualis, aliud quid poſt poſitum diaphani reſiſtentiam promovens; cujuſmodi

cujuſmodi quippe de cauſis diaphanum ſubinde forſan evaſurum eſt opacum, & inſtar opaci radios valebit repercútere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro ſubſtracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit ſuperficiei E F (cui parallela O Q) per lineam A B; tota linea B Q ad fundum O Q protenſa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo O Q; neque mirum fuerit, ſi major hic renitentia deprehendatur, quam ubi radius alter M B P perpendiculariùs incurrit, quando major ſit B Q, quam B P.] At nos ſecluſis iſtis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter reſiſtens, abſolutè perſpicuum, & radios ex ſe non reſpuens accipimus; quibus ſuppoſitis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium denſius penetrabit. Verùm in alterò caſu, cùm de medio denſiori lux rarius incurrit, non ſemper ea medium hoc permeabit. Nam ſi magna ſatìs fuerit obliquitas; ſubinde radius inflexus ſupra ſuperficiem E F attolletur, angulúſque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exſuperabit; quinimò fieri poteſt ut ipſum exæquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel ſemirecta; Et Z B ad Z D ſe habeat ut quadrati diameter ad ſuum latus quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aërem tranſeuntium, experientiâ conteſtante, rationem metitur) radius velut in ipſam E F refringetur, aut eam ſtringens procedet. Eſt enim Z δ (æqualis ipſi Z D) jam ad E F perpendicularis, adeoque δ κ arcum δ D contingens ipſi E F congruet. Unde patet obiter, id quod ſuperiùs inſinuatum, non univerſim conſtare, quòd radius à quo loco medii unius in aliud proceſſit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim ſaltem in caſu radius A B refringitur in ς α ſuperficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per α ς progreditur minimè recedet ad B A, nec ullam, ut manifeſtum eſt, omninò refractionem patietur. Sed hic caſus tantùm unus, & quaſi pro nullo cenſeri poteſt. Quod ſi, ſervatâ quoad denſitatem eâdem proportione, radius A B paullò magis ad rectam E F inclinetur, ejus. Refractus ſupra ipſam E F aſſurget; punctum quippe D rectam E F nunquam pertinget; & punctum B decurſâ rarius intra medium peripheriâ B ς in denſum remeabit; in quo proinde rurſus, circulatione ſuâ dimiſſâ, per tangentes ς α, δ κ ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium denſius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etſi quodammodò, velutique primariò, ſit refractio) reflectionis nomen adſciſcit hæc actio, quatenus & ipſa

D reflectionis

reflectionis leges examussim observat. Nam quoniam isoscelis trianguli Z B ζ anguli Z B ζ, Z ζ B sunt æquales, etiam anguli (de rectis residui) A B E, $\alpha\zeta$ F pares erunt; quod reflectioni proprium est. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen causam, fortassis ab iis prætermissam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis causa diversam; nè quisquam hæsitet, aut hoc adsumenti gravetur concedere.

Kepl. prop. 14.

VII. Hæc autem doctrina cùm multis experimentis utcunque comprobari queat, unum saltem breviter attingam satis illustre, neminísq; non examini patens. Esto triangulum A B C sectio prismatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, seu crystallini) basi parallela; in hujus autem base sumatur punctum quodpiam F, & sit angulus C F G circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hîc insinuatam, & posteà clariùs exprimendam, radius G F velut extremus erit eorum, qui rectæ B C è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo scilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque quasi patitur inflectionem) ejus refractus F M, reflexus F E; item F G refringatur in G O, & F E in E R. Porrò jam in G O statuatur oculi centrum O; & ab eo prodeat radius O Q, qui refringatur in Q P; ipsorum O G, O Q refracti G F, Q P (uti secundum principia nostra posthac constabit) progredientes divergent; eritque propterea ang. Q P C ⊏ G F C; quare radius Q P medium B C penetrabit, ac refringetur, puta in P N; liquebit autem è dicendis refractos F M, P N à se divergere; Hinc jam radiis M F, N P interpositum objectum radiis O G, O Q interjectum apparebit, velut ad $\mu\nu$, situ neutiquam immutatum. Rursus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius O K, cujus refractus sit K I; hic itaque rursum à G F diverget, ac indè erit ang. K I F ⊐ ang. G F C; adeóque K I minimè penetrabit medium B C, at reflectetur, puta in I H; tum I H refringatur in H S. Ergò jam radiis E R, H S interjacens objectum puta R S radiis O G, O K interjectum cernetur, velut ad $\rho\sigma$, situ partium everso. Consequuntur hæc doctrinam nostram, & experientiæ liquidò consentanea deprehendentur, quin & observatu dignum erit, è duplici refractione spectatum objectum M N Iridis coloribus tinctum adparere (rubro scilicet ad μ, cæruleo ad ν, croceo medium occupante) objecti verò R S è duplici refractione, sed reflectione tamen intercedente, apprehensi imaginem $\rho\sigma$ colore nihil ab ipso objecto differre. Quod ex eo sanè videtur evenire, quoniam ang. F E B angulo F G C æquatur; adeóque radius K O non aliter è vitro exit, quam R E ingressus est; seu

Fig. 13.

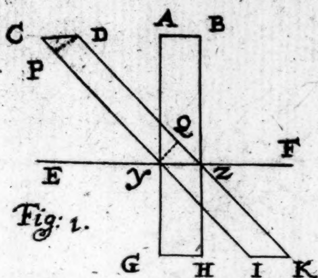


Fig: 1.

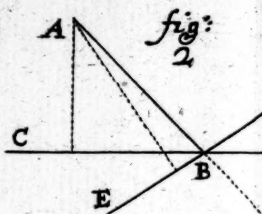


fig: 2.

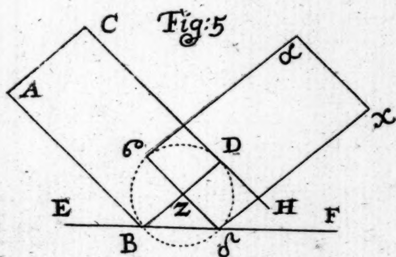


Fig: 5

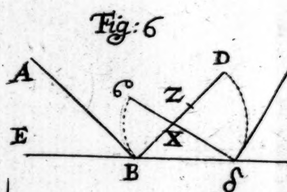


Fig: 6

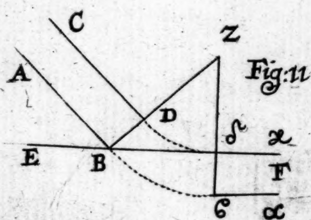


Fig: 11

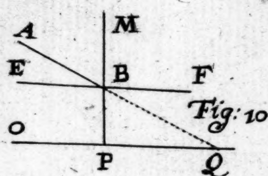


Fig: 10

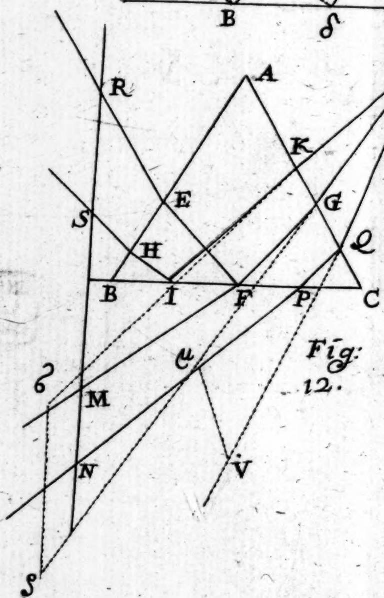
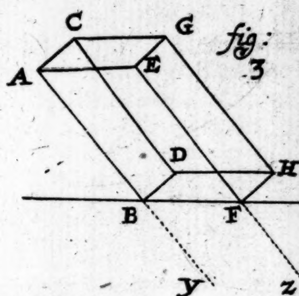
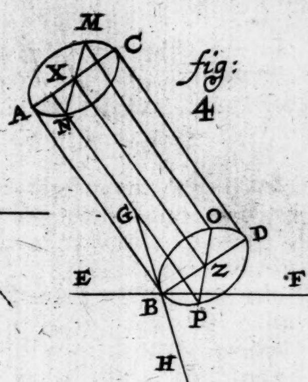
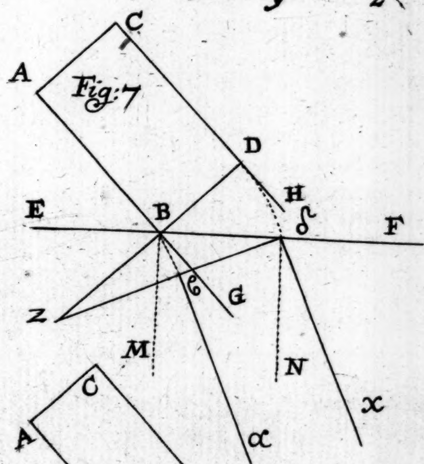
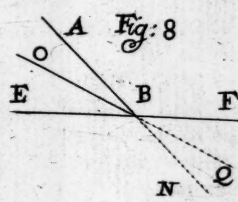


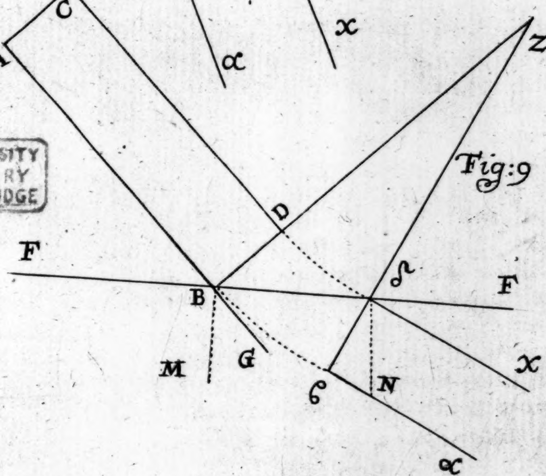
Fig: 12.


C
G
fig: 3
A
E
D
H
B
F
y
z


M
C
X
fig: 4
A
N
G
O
D
Z
E
F
B
P
H


C
A
Fig: 7
D
H
E
B
F
Z
G
M
N
x
α


A
Fig: 8
O
E
B
F
Q
N


C
A
Z
Fig: 9
D
F
B
F
M
G
N
x
α

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii S M, S N, & consimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satìs constare videtur exhinc, quòd radii quales S N ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendicularem N C refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in trancursu dicta sunto.

IX. Porrò, subnotandum est, quoad binos casus suprâ tractatos, cùm duo media, diversimoda comparandò duæ se representent proportiones, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis se habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut A ad B, in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut B ad A; nimirum in præcedentibus figuris, quanto Z D major est quàm Z B, in prima Hypothesi; tanto constat Z D minorem esse quàm Z B, in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cùm medii cui radius impingit superficiem hactenus adsumpserimus planam, advertendum superest, quamvìs illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius A B C D in curvam lineam Q B R, quam ad incidentiæ punctum B tangat recta E F. Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam Q B R, quo ad rectam E F, nisi quòd isthic arcus D δ in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quámque perexiguo distet intervallo punctum δ à curvæ vertice B, nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quantillus enim iste circulus esse debet, in quo chorda B δ, radii latitudine paullò major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus Z B δ æqualis supponi angulo Z B F; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unà rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ità tamen precariò, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper adsensu firmo concedatur.

Fig. 15.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata malìtis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica

cujuscunque

cujuscunque generis scientia, qualitercunque declarare studuimus, & è principiis admodum affinibus elicere; modo, meâ sententiâ saltem, omnium qui legenti se vel cogitanti suggesserunt, simillimo veri, cúmque tam rationibus Mechanicis, quam experimentis Physicis, & cùm ipsa rerum natura congruentissimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cùm postquam inter alios ista lucis symptomata explicandi modos hic ipse semet ingesserat, eum examini subjiciens, Geometriæ legibus (aliquanto sanè præter expectationem) adeò quadrantem comperissem. Meæ tamen eum tam fusè diducendi pepercissem operæ, si quæ doctissimus *Maignanus* hisce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priusquam hæc aggrederer contigisset inspexisse; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curiosiùs evolvi) supplendis his, & confirmandis accommodata. Porrò fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percensere, ac perstringere (quarum mihi nonnullæ crassâ petitione laborare; multùm aliæ à re proposita abludere; quædam animum subtilitate potius confundere, quàm vi constringere videbantur) verùm etiam huic exponendæ nimisquam immoratus, hactenus insinuatis contentus, omnes transiliam; illius saltem eruditissimi viri nefas fuerit non astipulari penitus, & acquiescere decreto; " qui, De-" um unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem ra-" diis diversa media permeantibus præscripsisse; ut omnes omnino " radii veri, & apparentes eandem semper inter se servent analogiam. His, inquam, dimissis, succedit ut è præstructis emanantia quædam Porismata subnectamus.

Lect. III.

I. Hypotheses Opticæ primarias, & fundamentales quasi leges exposuimus hactenus, & excussimus quomodocunque: Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum causas tam verè quàm expeditè discernendas conducentia) subjungamus corollaria; de cæteris quæ faciliora videntur, aut usum præ se ferunt potissimum seligentes. Radios autem jam consideramus, ut unicâ dimensione præditos (siquidem reliquæ, quibus Physicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hìc institutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aspectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admisso, singuli cujusque radii inflectio in superficie peragatur ad planum inflectens recta (uti constat è præmissis) cùm & nobis præsertim mox institutum sit singulorum punctorum radiationes consequentia symptomata sic expendere, ut locos ipsorum apparentes determinemus, oculi respectu centrum habentis in ejusmodi plano uspiam constitutum; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis superficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas respectivè congruas, brevitati consulentes & perspicuitati, substituemus. Porrò cùm quo præcisè modo peragatur visio, quibúsque prædita sit affectionibus adhuc expositum non sit; Et de illa tamen subindè crassius aliquid ac generalius dicendis intexere fortassis ex usu fuerit, illa saltem pervulgata, post hac curiosiùs expendenda, jam προλεπτικῶς adsumemus; nempe: Visibile punctum in illo radio situm apparere, qui procedens ab ipso (directè vel inflexè) centrum oculi permeat; proindéq; situm objectorum è radiorum ità transeuntium positione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipsorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum respectivè majores, minores, aut æquales constituentibus; distinctam unius cujusque puncti visionem radiis effici modo naturali, hoc est, divergentèr, oculo illabentibus; Et siqua sunt his agnata pariter obvia, seu manifesta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis passim receptis & usitatis definiendis aut explicandis abstinentes, ipsorum supponimus intellectum.

ctum. His utcunque majoris evidentiæ causâ, prælibatis, ad corollaria quæ diximus expromenda nos conferemus è vestigio.

II. Imprimis autem (posthac quidem in decursu, quoad plures sibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi singulari, quæ tractanda veniet, superficiei incidentes (radios, singularia quotvis inflexos designandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis proposito competentem inflexum assignandi modos proponemus; quorum adhiberi possit, qui rei natæ videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius A B ad B; Et per B ducatur Q B reflectenti perpendicularis; & fiat ang. α B Q = ang. A B Q, vel per B ducta sit E F reflectentem tangens; & fiat ang. α B F = ang. A B E; liquetque factum esse, modo utrovis, quod requirebatur, Pro refractione vero; ducatur Q B refringenti perpendicularis, & super diametrum (in hac liberè sumptam) Q B describatur semicirculus, incidentem A B secans in R; tum adjunctâ Q R, factóque I. R :: Q R. T (terminis autem I, R hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignitatur) circulo Q R B adaptetur Q S ipsam T exæquans; erit connexa S B protracta nempe) incidentis A B refracta. ¿ Vel: per incidentiæ punctum B ducatur E F refringentem contingens; & in hac utcunque sumpta B K sit circuli diameter, incidentem A B secantis ad R; & fiat I. R :: B R. T; & adaptetur B S = T; erit S B α ipsius A B refractus: Vel demum: In ipsa A B sumptâ utcunque diametro R B, super hac descriptus circulus secet perpendicularem Q B ad Q; vel tangentem E F in K; fiatque I. R :: B K. T. & adaptetur Q S = T; erit rursus S B α incidentis A B refractus. quorum ratio è positis inflectionum legibus admodum est manifesta. verba piget impendere. Fig. 16. Fig. 17, 18, 19.

III. Radii cujusvis incidentis inflexus inflexi vicissim incidens evadet.

Hoc plerique, diversè paullò prolatum, accipiunt, aut postulant. è præmistis autem facillimè colligitur. Idque potius methodi gratiâ (sicut & nonnulla quæ sequentur) quàm quia res mereretur, ostendemus. Pro reflectione; Radius A B speculo E F impingens reflectatur in B α; dico radium B α permutatim in B A reflecti. Nam quoniam A B incidens reflectitur in B α, erit ang. α B F æqualis angulo ABE. Posito jam α B incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum B E æquabitur angulo α B F; proinde non alius erit ab ipso A B E quare B A ipsius α B reflexus erit. *Alhaz.* VII. 4. *Herig. Catop. Axiom.* 2. Fig. 1. 16.

Pro

Pro refractione vero: Incidat radius A B medio E F in B; & isthic refringatur in B α; dico permutatim radium α B regredientem in B A refringi. Nam per occursum B ducatur Q B P media dirimenti E F perpendicularis; & in hac utcunque sumpto puncto P ducatur P G ad A B protractam perpendicularis, ut & P H ad B α; & producatur α B S. Est ergo P G sinus rectus anguli incidentiæ A B Q ad radium B P; & P H sinus anguli refracti Q B S ad eundem radium B P. Cùm itaque ratio P G ad P H refractionem metiatur è superiori medio factam in inferius; etiam vicissim rectarum P H, P G proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in superius. Unde si radius α B jam ponatur incidens; cùm sint P H, P G recti sinus anguli incidentiæ P B H, & anguli P B G, liquidum est ipsam H B in B A refringi.

Fig. 20.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo; is proinde respectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc est reflectionis respectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo; incidentiæ verò, nè quis secùs accipiat, apud nos angulus est, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propositum spectat effatum, id è positis principiis manifestè consectatur. Etenim in reflectione ipsi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales sunt; in refractione saltem recti sinus angulorum refractorum sinubus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquidò constat propositum: quorsum verba, quorsum Schemata multiplicem?

V. Cùm incidentes ad superficiem mediam sese decussant, iidem sese inflectionem passi decussabunt, eodem ordine servato, quem directè progedientes habuissent (utique sic ut perpendiculari post inflectionem propior incedat qui propior anteà fuit.)

Hæc propositio reverà non differt à præcedente; quò demirer eam à non nemine principia nostra usurpante aliunde comprobari.

Herig. Diop. 8.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens est; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ respondet. Pro refractione vero: sit recta Q B P refringenti perpendicularis; incidant autem radii A B G, D B H (scilicet AB obliquius

obliquius quàm D B.) Horum verò refracti sint B α, B δ; dico angulum G B α majorem esse angulo H B δ. Nam ad B P in perpendiculari liberè sumptam diametrum constituatur semicirculus B G P; cui occurrant ipsæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipsæ B α, B δ punctis α, δ. Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B δ, vel arcus G K arcui H δ; connectatur etiam recta δ G, secans ipsam P K in X, ducatnurque denuò subtensæ G δ, H δ. Jam ob angulos P G δ, P H δ pares (arcui quippe P δ insistentes ambos) & angulos G P K, H P δ ex constructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P δ inter se similia. Quapropter erit P G . P X : : P H . P δ. est autem è lege refractionum P H . P δ : : P G . P α. quare P G . P X : : P G . P α : unde P X = P α. est autem P X minor quàm P K (quia tota subtensa G δ intra circulum jacet.) Quare P α minor est quàm P K; adeóque P K secabit angulum G P α. quamobrem arcus G α major erit arcu G K, hoc est arcu H δ. & idcircò major erit angulus G B α angulo H B δ : Q. E. D. Fig. 21. Fig. 22.

Procedit hæc demonstratio quoad casum, ubi I ⊏ R (vel cùm radius è medio rariori densius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque casum facilè deducitur conclusio. Nam si vicissim α B, δ B concipiantur incidentes, erunt ipsæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli α B G, δ B H erunt anguli refracti.

Hujusce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonstratio. Confer sodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit posuimus. *Diopt. Prop. 4.*

VII. In isto refractionis casu, quum I minor est quàm R, si anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus sinus P H, ad sinum totum se habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingredietur, aut penetrabit. Fig. 23.

Nam penetret (si fieri potest) obliquioris alicujus A B G refractus B α. Erit ergo P G . P α : : (I . R : :) *P H . P B. est autem P G major quàm P H. ergo P α major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergò A B non refringetur in medium ipsi E F subjectum. * *Hypoth.*

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum suum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum suum.

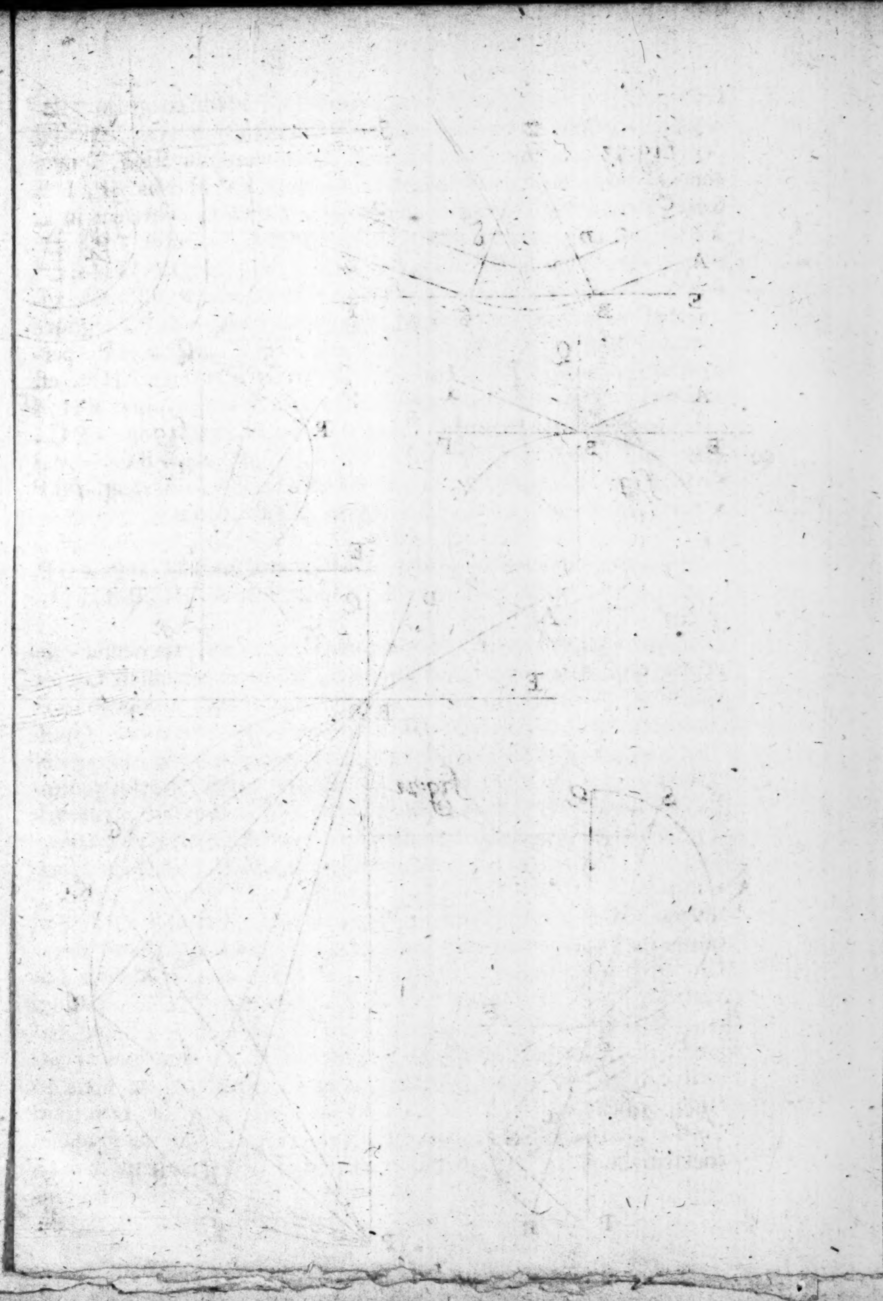
Erit scilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferatur) ang. G B P . α B P . ⊏ ang. H B P . δ B P. Nam triangula Fig. 21, 22.

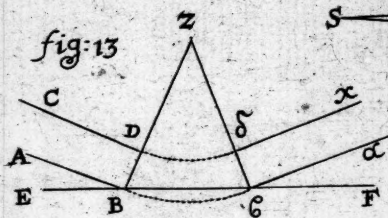
GPα, HPδ ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GPα minorem HPδ comprehendet) tum centro P per δ describatur circulus EδF ipsas PG, Pα secans punctis F, E; item connexâ EH, centro H per δ transeat circulus HMN ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa Eδ cum PG conveniat in L. Estque jam ang. αPδ. ang. δPH : : sector EPδ. sector δPF $\sqsubset$ triang. EPδ. triang. δPL : : Eδ. δL : : triang. EHδ. δHL $\sqsubset$ sector MHδ. sector δHN : : ang. EHδ. ang. δHP. est igitur ang. αPδ. ang. δPH $\sqsubset$ ang. EHδ. ang. δHP. ergóque compositè ang. αPG. ang. δPH $\sqsubset$ ang. EHP. ang. δHP. permutandóque ang. αPG. ang. EHP $\sqsubset$ ang. δPH. ang. δHP. est autem HP. PE : : HP. Pδ : : I. R : : GP. Pα. adeóque EH ad αG parallela; vel ang. EHP = ang. αGP. ergò erit ang. αPG. ang. αGP $\sqsubset$ ang. δPH. ang. δHP. hoc est ang. αBG, αBP $\sqsubset$ ang. δBH. ang. δBP. vel componendo ang. GBP. ang. αBP $\sqsubset$ ang HBP. ang. δBP. Quod erat demonstrandum.

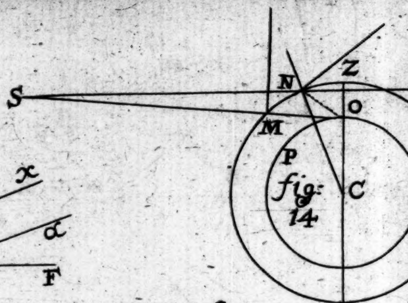
Corol. 1. Ang. αBG. ang. αBP $\sqsubset$ ang. δBH. ang. δBP.
2. Ang. αBG. ang. PBG $\sqsubset$ ang. δBH. PBH.

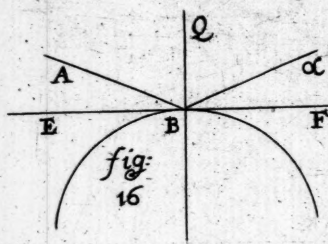
Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnâsse: "In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsissima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe nostrum;) in his enim angulus refractionis major est subtriplo anguli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis compertum est. Hæc, inquam, ille ταυτοινηὶ. Quasi vero dixisset; numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum efficiunt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo similius. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad quamvis inclinationem (puta graduum 15.) quod sit angulus refractionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos angulum appellare solemus) necessariò, sicuti modò demonstratum est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque majorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta dictum principium institutus calculus angulum præbebit refractum 19. 24′; angulúmque proinde refractionis 10. 36′, qui 30 graduum trientem exuperat. Quare cùm Clarissimus vir Hypothesin hanc (à

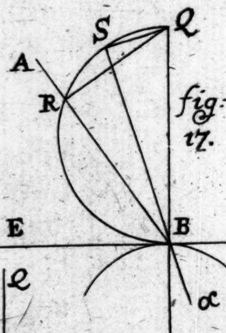
Cartesio



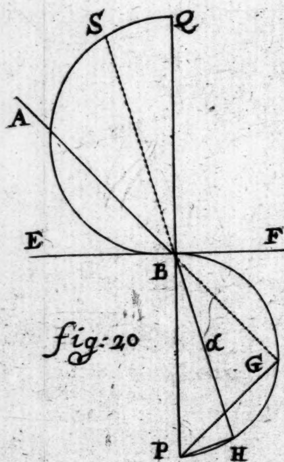

fig:13
Z
C
D
δ
x
A
α
E
B
β
F

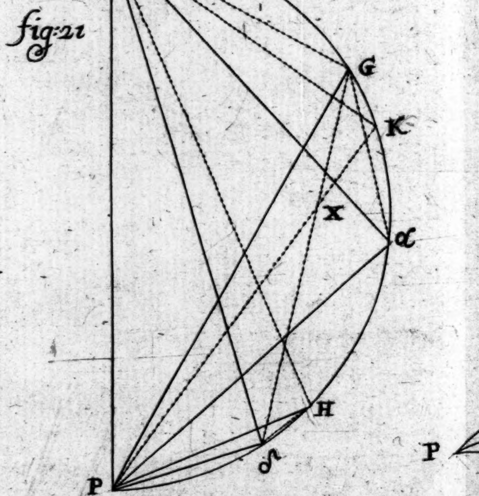

S
N
Z
O
M
P
fig: 14
C

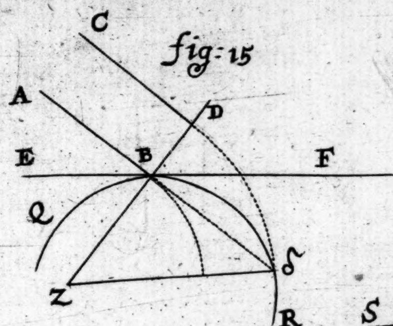

Q
A
α
E
B
F
fig: 16

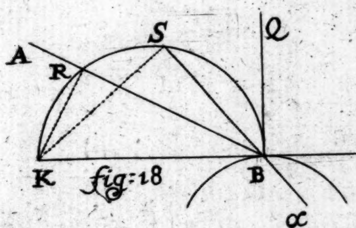

S
Q
A
R
fig: 17.
E
B
α


D
Q
A
E
B
F
T


S
Q
A
E
F
B
fig:20
α
G
P
H


fig:21
G
K
X
α
H
δ
P
P





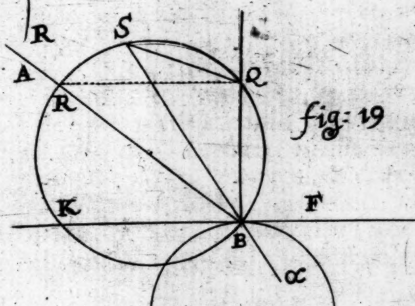
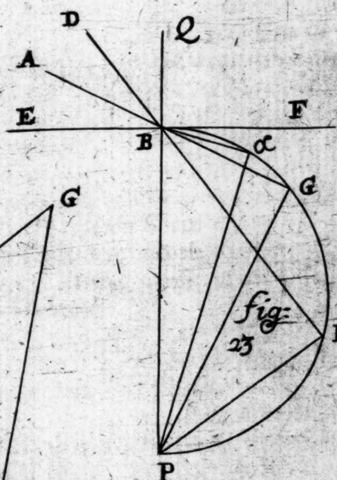
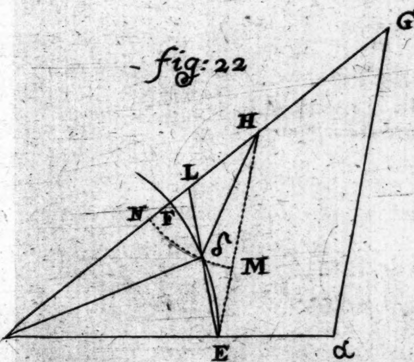


Fig 21.





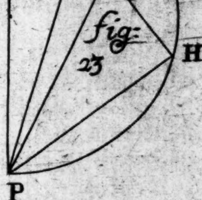
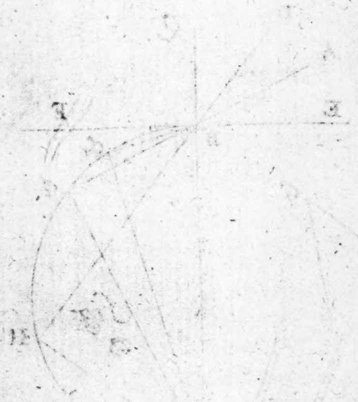


Fig. 24, 25.

n
o
-
s.
-
n
n
o
H
l-
er

N,
ue
m
C;
xo
tur





Cartesio quidem primò repertam, sed ab aliis plerisque recentioribus opticis *Mersenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipso ejus consodale doctissimo *Ricciolo* susceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parùm interest veram deprehendi) labefactatum iret; eam potiùs imprudens experientiæ Suffragio communivit. Quinimò si quid insit huic principio vitii, illud potiùs erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen discrepantia num ipsius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibusdam intervenientibus causis adscribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortassis cognata reflectionis lex, à nemine non admissa, experimentis omnibus præcisè responderet. Nobis sufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præsertim, dicta lex experientiæ, quam præferunt authores, perquam consentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ conclusiones cum experientia mirè conspirant; nec ab ea quod animadvertere potuerim, unquam discordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud suppetat, Geometricis, ratiociniis præsternenda) non verebimur ubivis ut ratam sumere, ac adhibere; satis certi (apud nos saltem) in elicitis ab ea conclusionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emersurum.

IX. Obiter hîc & παρεμβατικῶς problemation quoddam interseram (quia Schema num. 6. superius ei gratis inserviet, ejusque constructio è superiore constructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere, cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci posse supponimus, aut postulamus) & ad diametrum B P construatur semicirculus; & sit utcunque P G . P α : : I . R (pro P G verò præstat ipsam diametrum P B accipere) sumatúrque Arcus G K subtendens angulum parem dato. Fiat autem P X = P α. & per G, X ducta recta circulo occurrat in δ. demum accipiatur Arcus δ H = G K, erit ductæ B H refractus B δ (uti præcedentem discursum invertendo non difficilè colligitur) adeóque liquet factum esse quod erat propositum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè. Fig. 21.

X. Cujuscunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, sitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcunque sumpto puncto C, per hoc transeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipsius M O inflexus G N K; erit in reflectione K N = K C; in refractione verò K N . K C : : I . R . (vel item, si in ipso inflexo Fig. 24, 25.

sumatur utcunque punctum K; & ab eo ducta K L ad perpendicularem C N parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic K N = N L; & hìc K N . N L : : I . R.)

Fig. 24, 25. Nam 1. in reflectione; quoniam ang. O N C = K N C (ex lege reflectionis.) Et ang. O N C = K C N (ex Hypothesi quòd O N, C B parallelæ sunt) erit ang. K C N = ang. K N C. adeóque K N = K C = N L: Q. E. D.

2 In refractione; ducantur C E ad N O, & C F ad N K perpendiculares (unde liquet puncta E, F existere in circulo super diametrum C N descripto) quare, connexâ E F; erunt anguli C E F = ang. F N C (eidem insistentes peripheriæ F C) æquales. Item propterea est ang. E C F = ang. F N E = ang. N K C. quare triangula E C F, N K C sunt æquiangula sibi mutuò; quamobrem est C E . C F : : K N . K C. atqui (juxta legem refractionis) est C E . C F : : I . R. qua propter erit, K N . K C : : I . R : vel K N . N L : : I . R: Q. E. D.

XI. Quod si per N ducatur tangens U T; erit (in reflectione) etiam K T = K N; & N T angulum M N K bisecabit. In refractione verò erit K T ad K N, ut co-sinus anguli refracti, ad cosinum anguli incidentiæ. Quæ saltem ad noto, ceu Lemmatica.

XII. Exhis facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem satis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortassè per nimias ambages.

1. Demonstratæ prostant. Ut in parabola (puta R B S, cujus axis B C) incidat M N O axi B C parallelus; ejusque reflexus sit N K; erit igitur (ex ostensis) K N = K C. at si punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notissimam hujusce curvæ proprietatem) K N = K C. quare paralleli radii reflexus necessariò per umbilicum transibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig. 26. 2. Item *in ellipse*, cujus axis B D, foci H, K, si ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ H N, K N; satis celebre est, quòd perpendicularis C N angulum H N K bisecabit. Unde N H . N K : : H C . C K. & componendo N H + N K . N K : : H K . C K. vel B D . N K : : H K . C K. vel permutando B D . H K : : N K . C K. quare si talis fuerit ellipsis, ut sit B D . H K : : I . R. etiam erit N K . C K : : I . R. verum si incidens M N ad B D parallelus refringatur in N K; erit (juxta mox ostensa) etiam N K . C K : : I . R. patet itaque quòd ipsius M N refractus per focum K transibit, Quid plura?

3 Non

3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K; reliquisque velut anteà præparatis) ostendetur fore perpetuò N K. C K : : B D. H K. unde si fuerit (ex *Hyperbolæ* constructione) B D. H K : : I. R. erit etiam N K. C K : : I. R. quòd si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K. C K : : I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbolæ* focum transibit. Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsis* aut *Hyperbolæ* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radieus in alterum reflectatur, admodum facilè dilucescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptricis primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico forè B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A B N Z sibi mutuò æquilatera fore; & esse A B = B Z : Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes. Fig. 29.

Quoad punctum longè dissitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quòad punctum è sensibiliter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeóque videbuntur ab eo promanare.

XVI.

XVI. Hinc punctum Z erit ipsius A (respectu oculi uspiam constituti) imago perfectissima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quàm locum à quo plures radii (quot scilicet afficiendo visui sufficiunt) similiter divergere, seu dimanare videntur, atque cùm à primariis objectis diffunduntur. Proinde cujusvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilimè determinatur.

XVII. Exhinc etiam eâdem operâ, visûs imaginem adspectantis axis, seu reflexus principalis (iste nimirum qui per oculi centrum (puta O) transit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iste; nec non ejus cum E F intersectio N, punctum reflectionis.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam subjiciemus annotatiunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, sed alioquin situ indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbola*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & bisecentur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y
Fig. 30. ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Asymptotis C G, C H per ipsum O descripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta transibit. Nam utcunque ducta E F ad P O parallela *Hyperbola* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulnm A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipsam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbolæ* natura, est C D. C Y :: Y O. D N. quare dividendo erit Y D. C Y :: Y O—D N. D N; hoc est O Q. C Y :: N Q D N. & permutatim O Q. N Q :: C Y. D N. item rursus ob C D. C Y :: Y O. D N. erit componendo C D + C Y. C Y :: Y O + D N. D N. hoc est A B. C Y :: B N. D N. vel permutando A B. B N :: C Y. D N. quare est O Q. N Q :: A B. B N. ergò rectangula triangula, O Q N, A B N similia sunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Mereri saltem vel *Hyperbolæ* gratiâ videbatur hæc ejusce proprietas adnotari; quin & Analogiæ causâ versus ea quæ sequentur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereà. Ad refractiones transeo.

LECT.

Lect. IV.

I. AD ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam superficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentiùs prosequemur, quia nondum pro merito suo videtur satis excultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præstituemus nobis, & quasi normam in sequentibus observandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (E F) incidentium radiorum (A B, M N) refracti (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli. Nam quoniam A B, M N sunt, ex hypothesi, paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Itaque refractos habent angulos pares; horúmque complementa (scilicet anguli α B F, μ N F) æquantur, quare liquet refractos B α, N μ sibi parallelos esse. Fig. 31.

III. Hinc infinitè distantis, hoc est parallelos radios emittentis (infinitam ad sensum distantiam intelligo, qualis est quoad hoc stellæ cujuspiam) puncti locus apparens, aut imago per hujusmodi refractionem effecta infinitè quoque distat; quippe cùm hæc etiam per radios parallelos adspectetur. Itaque situs ejus respectu visûs ubivis positi facilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians immensè dissitum; connexáque A O refringentem E F secet in G; sitque radii A G refractus G α; per O verò ducatur O B Z ad α G parallela; in hac ad infinitum protensa (velut ad Z) apparebit punctum A. Cùm enim radii A G, A B sint (ad sensum) paralleli, etiam ipsorum refracti erunt paralleli. Quare cùm G α sit refractus ipsius A G, erit B O, ad G α parallela, etiam radii A B refractus. Ergò punctum A in recta O B protensa apparebit. Quoad hujusmodi radiationem nil succurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti symptomata contemplemur. Fig. 32.

IV. Sit recta A B rectæ refringenti E F perpendicularis; in qua sit punctum radians A, ab E F haud ad sensum longè remotum; ab hoc Fig. 33.

autem

autem procedentis cujusvis radii (ceu A N) refractus N α cum ipsa A B
Lect. 3. num. 9. (protractus utique, vel retractus) conveniat in K; dico fore N K. N A :: I . R . (Neque non inversè, si fuerit N K . N A :: I . R; erit K N α ipsius N A refractus.)

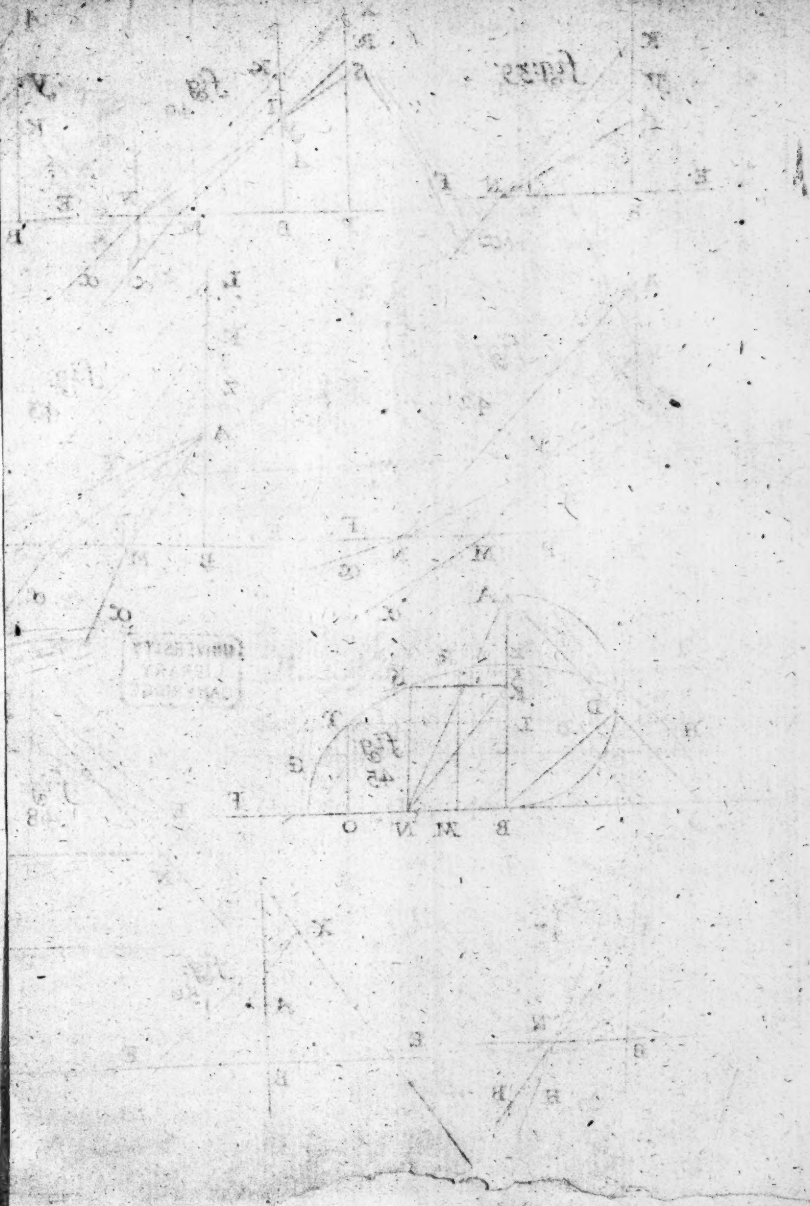
Hoc è superiùs ostensis immediatè consectatur. Et hinc etiam satis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut passim in sequentibus assumendum) angulus N A B, æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum sit anguli A N B;) & angulus N K B (complementum videlicet anguli K N B) æquatur angulo refracto. Cùm itaque sit hinc sinus anguli N A B (vel anguli deinceps N A K) ad sinum anguli N K A, ut I ad R; etiam in triangulo N A K latus N K ad latus N A sese habebit ut I ad R. Quod E. D. Quinetiam si latera N K, N A se habeant ut I ad R; etiam dictorum angulorum sinus ità se habebunt; unde constabit ipsam K N α ad A N pertinere.

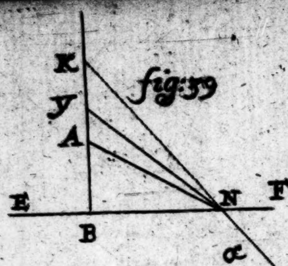
Fig. 34, 35.

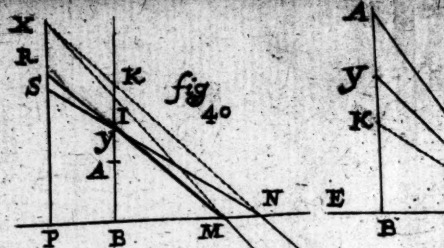
V. Hinc particularis emergit expeditissimus modus hujusmodi quotcunque refractos designandi. Nempe per radians punctum A ducatur A B refringenti E F perpendicularis; & fiat A B . Z B :: R . I; tum per Z ducatur recta G H ad E F parallela. Proponatur jam quilibet incidens A N, cui conveniens designandus est refractus. Eum sic dedesignaveris. Protrahatur N A (si opus) ut cum G H conveniat in S; & centro N per S describatur circulus ipsam A B secans in K (secabit utique si refractus aliquis ad incidentem A N pertineat) erit connexa K N, protractáque radio A N debitus refractus. Etenim est K N . A N :: S N . A N :: Z B . A B :: I . R :: K N . A N. unde liquet (è præcedente) propositum.

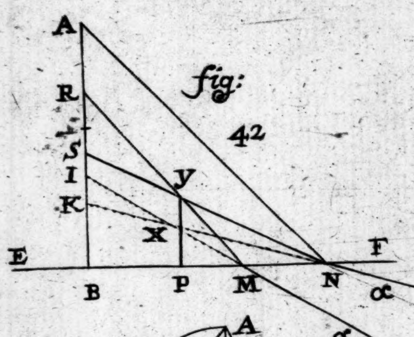
VI. Exhinc etiam hujusmodi refractionis præcipua symptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ seorsim acceptis, & quæ secum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo casu (quum nempe refractio fit è rariori in densius, seu quum I ⊏ R) concursus refractorum cum recta A B (quam subinde radiationis hujus axem appellare licebit) supra punctum Z existit. Nam connexâ N Z; quoniam ang. N Z S recto B Z S major est, erit N S (vel N K) ⊏ N Z; adeoque B K ⊏ B Z. Item, in secundo casu (quum media contrariè se habent) dictus concursus infra punctum Z existit. Etenim rursus connexâ N Z; est ang. N S Z recto A Z S (interno) major, adeóque N Z ⊏ N S, vel N K; & ideò B Z ⊏ B K.

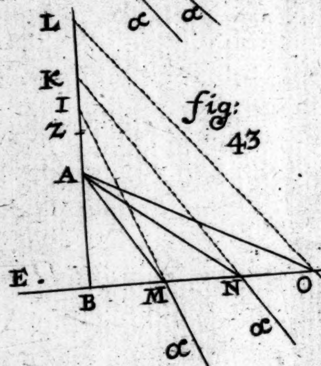
VII. Hinc liquet punctum Z esse limitem ultra vel citra quem (re-
Fig. 35. spectivè) omnes refracti cum axe A B concurrunt. Quinimò quòd ipsius

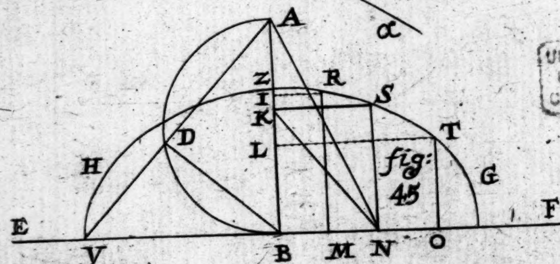


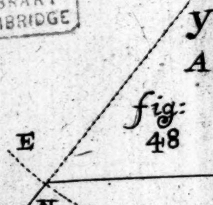

K
fig:39
y
A
E
N
F
B
α

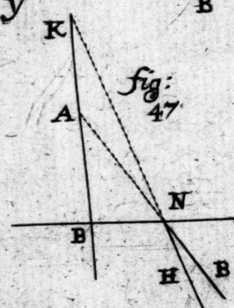

X
R
S
K
fig 40
I
y
A
N
E
P
B
M
α
α
A
y
K
B

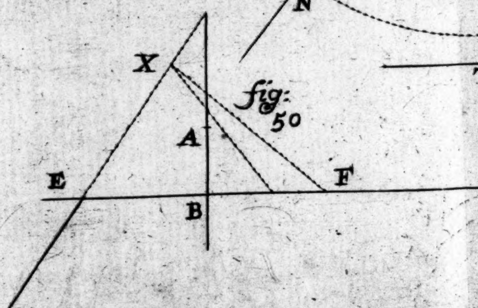

A
fig:
42
R
S
I
y
K
X
E
F
B
P
M
N
α
α

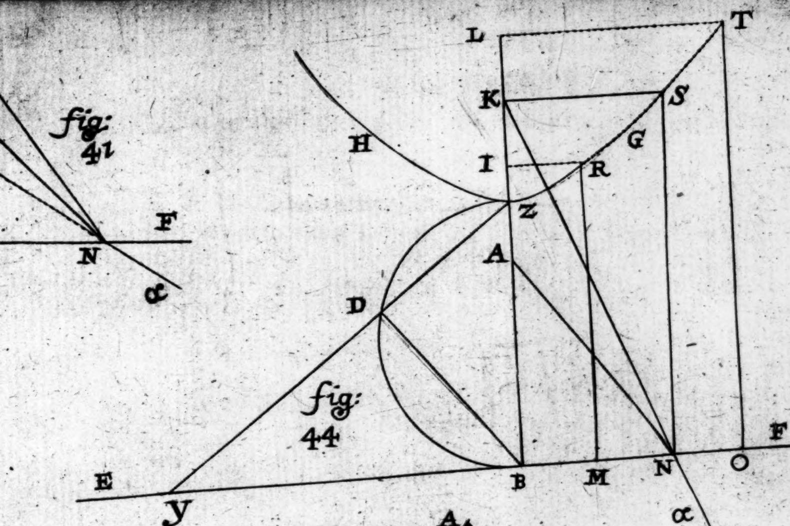

L
α
α
K
I
fig:
43
Z
A
E.
B
M
N
O
α
α

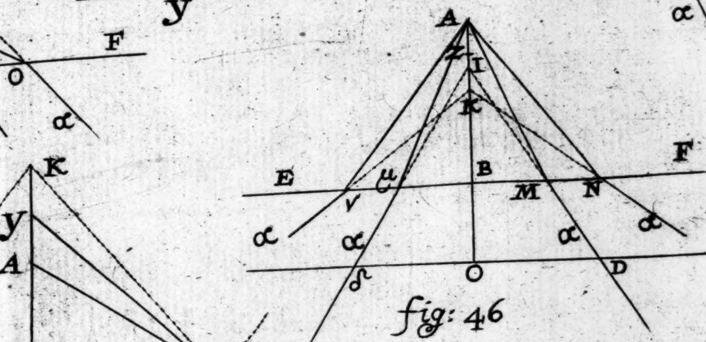

A
Z
R
I
S
K
D
T
L
H
fig:
45
G
E
F
y
B
M
N
O

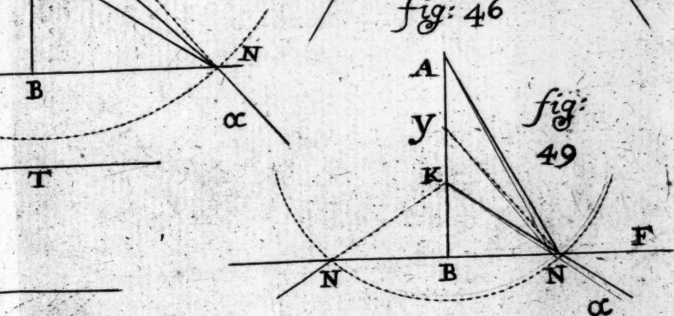

y
A
fig:
48
E
N


K
fig:
47
A
N
B
H
B


X
fig:
50
A
E
F
B







4

ter-

AB
duo
li B
N.

I M,
lela,
R T
M.
li-

acti
I B
mo.
I.
I.

Fig. 37.

am
ur-

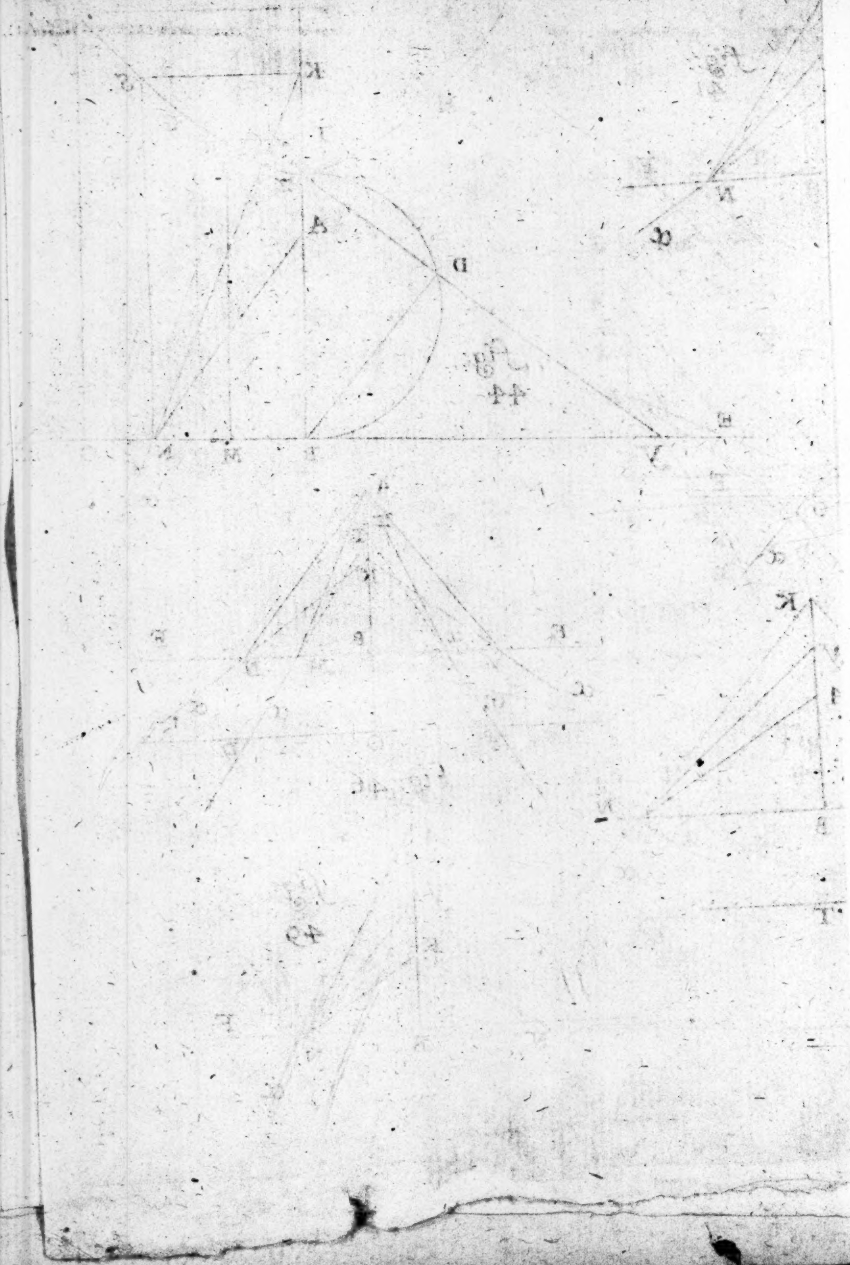
ud

u- Fig. 39.
B.

fi- (a) Hypoth.
q. (b) 4 hujus.
n-
pe

l.
l.
q

l.



ipsius perpendicularis A B (quasi) refractus in ipsum punctum Z terminatur. Porrò:

VIII. *Lemma*: sit A B ad E F normalis, & à duobus in A B sumptis utcunque punctis A, I (quorum A proprius ipsi B) ad duo puncta quævis M, N in ipsa E F acceptis (quorum verò M sit ipsi B vicinius) connectantur rectæ A M, A N; & I M, I N; dico fore A N . A M $\sqsubset$ I N . I M.

Nam centro N per A describatur circulus P A O R (rectas I M, I N intersecans punctis O, R) & per R ducatur R T ad E F parallela, secans I M in S. Et ob angulum N R T obtusum, patet rectam R T extra circulum totam excidere; unde S M $\sqsubset$ (O M $\sqsubset$) A M. adeóque A N . A M $\sqsubset$ A N : S M :: R N . S M :: I N . I M. liquet igitur esse A N . A M $\sqsubset$ I N . I M: Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum A M, A N (quorum hic obliquior) refracti M α, N α cum axe A B conveniant punctis I, K, erit in primo casu I B $\sqsupset$ K B; in secundo I B $\sqsubset$ K B. Etenim connexâ I N; est in primo casu, N K . M I :: N A . M A $\sqsubset$ N I . M I. adeóque N K $\sqsubset$ N I. unde B K $\sqsubset$ B I. ast in secundo, N K . M I :: N A . M A $\sqsupset$ N I . M I quare N K $\sqsupset$ N I; & indè B K $\sqsupset$ B I. Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo casu concursus extra angulum A B N versantur; in secundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decursu liquidius, ac multifariàm constabunt.

X. Porrò, bina quoad hos casus *Theoremata* subjiciemus, usus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo casu) Y B . A B :: I . $\surd$ Iq — Rq. sit autem cujusvis incidentis A N refractus K N α; & connectatur Y N: erit K B . Y N :: $\surd$ Iq — Rq . R. Fig. 39.

Nam ob Y Bq . A Bq :: (a) I q . I q — R q. erit per conversionem rationis Y Bq . Y Bq — A B q :: I q . R q :: (b) K N q . A N q. & permutando Y B q . K N q :: Y B q — A B q . A N q. componendóque Y B q + K N q . K N q :: Y B q + B N q . A N q. (nempe Y B q — A B q + A N q = Y B q + B N q; quoniam A N q — A B q = B N q) Quarè rursus permutando est Y B q + K N q . Y B q + B N q :: K N q . A N q. dividendoque K N q — B N q . Y B q + B N q :: K N q — A N q . A N q; hoc est K B q . Y N q :: I q — R q . R q: Q. E. D.

(a) Hypoth.
(b) 4 hujus.

 XI. *Corol.*

XI. *Corol.* 1. Hinc si duo refracti $M\alpha$, $N\alpha$ cum Axe AB conveniant in I, K; & à puncto Y ad incidentias ducantur rectæ YM, YN; erit KB . IB :: YN . YM. Nam KBq . YNq :: Iq — Rq . Rq :: IBq . YMq . quare permutatim KBq . IBq :: YNq . YMq.

Fig. 40.

XII. 2. Hinc etiam si refracti MI, NK conveniant in X; & demittatur XP ad AB parallela; & huic protractæ MY, NY occurrant in R, S; erit NS = MR. Nam XP . SN :: KB . YN :: IB . YM :: XP . RM. cum itaque sit XP . SN :: XP . RM; erit SN = RM.

XIII. 2. In secundo casu; sit cujusvis incidentis AN refractus $KN\alpha$; & fiat YBq . KBq :: Rq . Rq — Iq; & connectatur YN; erit ABq . YNq :: Rq — Iq . Iq.

Nam quia KBq = KNq — BNq = KNq — YNq + YBq; erit (hypothesin persequendo) YBq . KNq + YBq — YNq :: Rq . Rq — Iq :: ANq . ANq — KNq . & per rationis conversionem YBq . YNq — KNq :: ANq . KNq. (est autem YBq = YNq — BNq = YNq — ANq + ABq) ergò YNq — ANq + ABq . YNq — KNq :: ANq . KNq (hoc est, antecedentes & consequentes adjungendo) :: YNq + ABq . YNq . quare dividendo ANq — KNq . KNq :: ABq . YNq hoc est Rq — Iq . Iq :: ABq . YNq : Q. E. D.

Fig. 41.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rursus, si duo refracti $M\alpha$, $N\alpha$ secent axem punctis I, K; ipsos autem se decussent puncto X; & fiat YP . XP :: R . √Rq — Iq . & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS = MR.

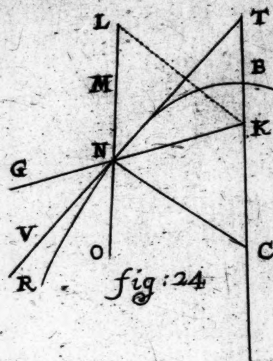
Nam SB . KB :: YP . XP :: R . √Rq — Iq . quare AB . SN :: √Rq — Iq . I . item RB . IB :: YP . XP :: R . √Rq — Iq . quare AB . RM :: √Rq — Iq . I . ergò AB . SN :: AB . RM . quare SN = RM.

Fig. 42.

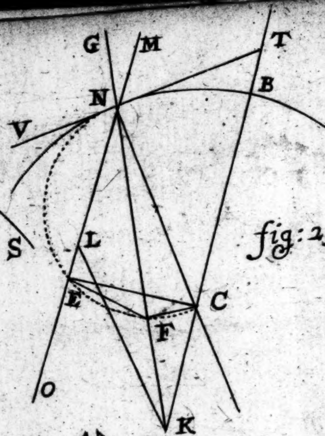
2. Hinc SB . RB :: KB . IB.

XV. Porrò, notandum est quò radii ab A manantes axi viciniores sunt eò refractos ipsorum spissiùs incedere; seu minora fore concursuum interstitia; ut nempe si in refringente EF sumantur æqualia intervalla MN, NO; & radiorum punctis M, N, O incidentium refracti $M\alpha$, $N\alpha$, $O\alpha$ cum axe concurrant punctis I, K, L; erit intervallum

Fi



L
T
M
B
K
N
G
V
O
C
R
fig:24



G
M
T
B
N
V
S
L
E
F
C
O
K

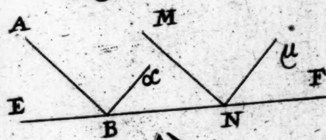
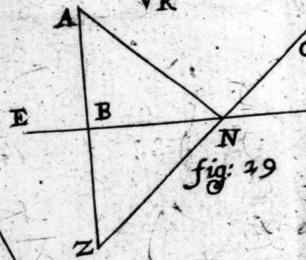
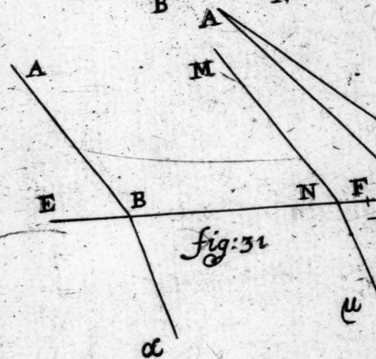


fig:28
A
M
α
μ
F
E
B
N

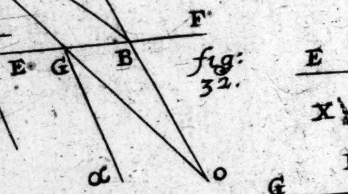


A
E
B
N
fig: 29
Z

Fi

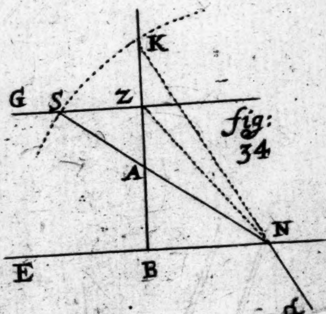


A
M
A
Z
E
B
N
F
fig:31
F
E
G
B
fig: 32.
μ
α
α
O

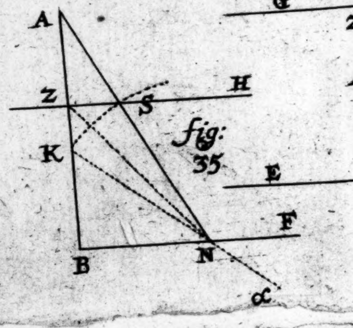


E
X
G

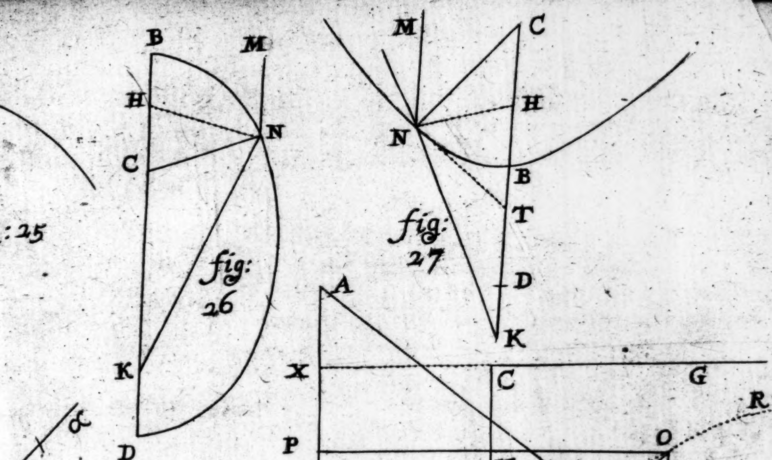
Fi



K
G
S
Z
fig: 34
A
N
E
B
α



A
Z
H
S
K
fig: 35
E
F
B
N
α



ſum-
non
e-

Fig. 43.

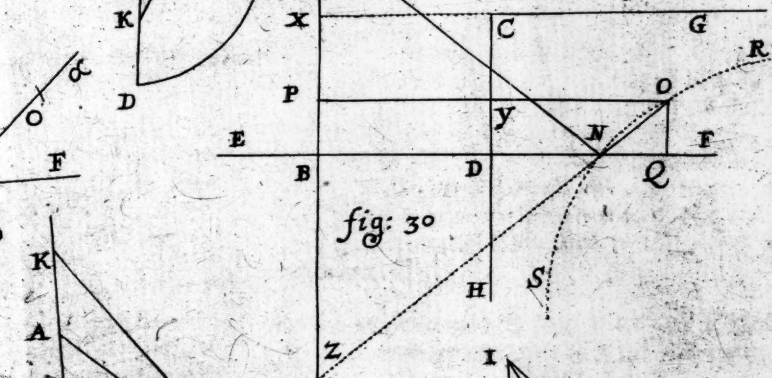
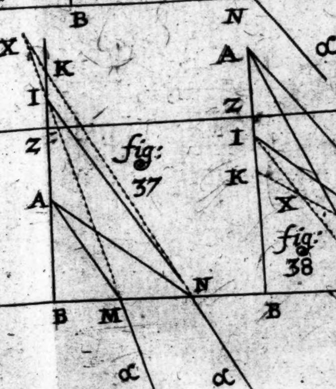
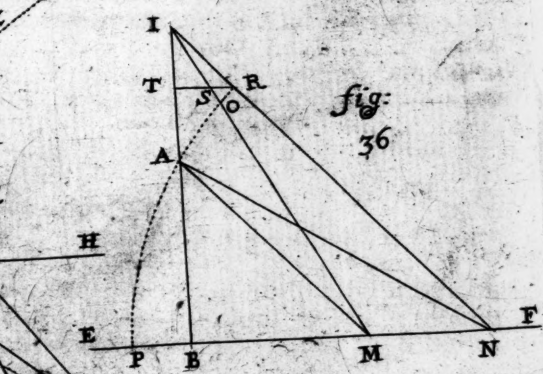


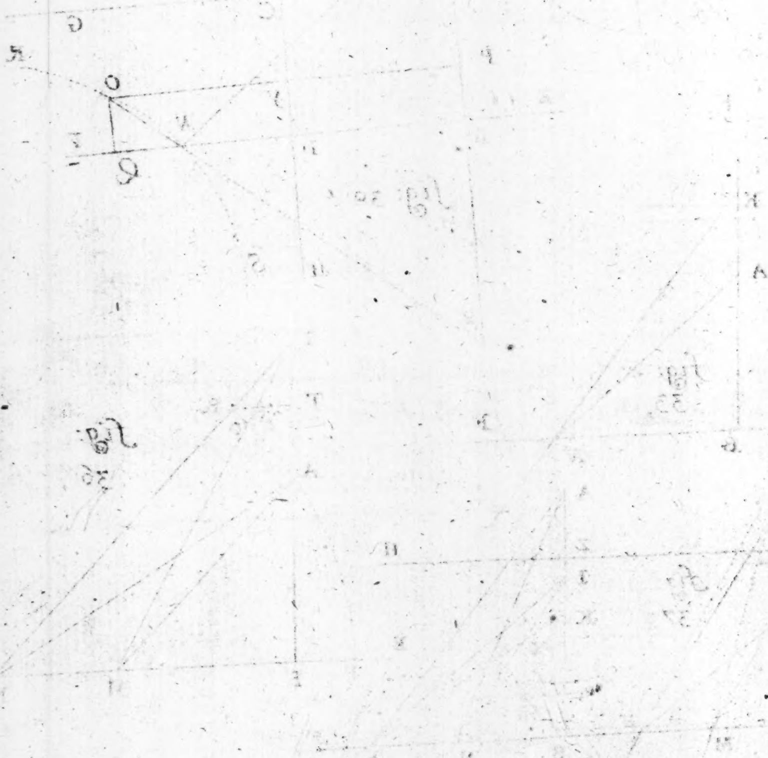
Fig. 44.







.45.



tervallum I K minus ipso K L; seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis M N, N O; erit I K. K L ⊐ M N. N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate constabit. Fig. 43.

XVI. In primo casu; sit (ut antehac) Z B. A B :: I. R; superque diametro Z B constituatur semicirculus; cui à puncto B adaptetur B D = B A; & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y; tum ad semiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) describatur Hyperbole H Z G; in hac autem sumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N α; erit K M α incidentis A N refractus. Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura est K B q − Z B q. B N q :: B Z q. B Y q :: Z D q. B D q (hoc est) :: Z B q − A B q. A B q. quare componendo K B q − Z B q + B N q. B N q :: Z B q. A B q hoc est K N q − Z B q. B N q :: Z B q. A B q. permutandóque K N q − Z B q. Z B q :: B N q. A B q rursusque componendo K N q. Z B q :: A N q. A B q. denuóque permutando K N q. A N q :: Z B q. A B q :: I q. R q. quare K N. A N :: I. R. ergo K N ipsius A N refractus erit: Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concursus (puta I, K, L) à se distant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T; vel ipsarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu passim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujusmodi curvas ostensum est) in majori ratione crescunt, quam ipsæ B M, B N, B O; nempe Z L. Z K ⊏ L T. K S. & Z K. Z I ⊏ K S. I R. quare satis liquet propositum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiæ perquam exiguæ sunt; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur; utcunque circa ipsum præcipuè constipantur.

XVIII. Haud absimiliter, in secundo casu, super ipsa A B describatur semicirculus; & huic accommodetur B D = B Z; & connexa protractáque A D refringenti occurrat ad Y; tum centro B semiaxibus B Z, B Y describatur ellipsis H Z G; & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela; connectantur denique rectæ A N, K N; erit K N incidentis A N refractus. Fig. 45.
Etenim ex ellipsis natura est K S q. Z B q − S N q :: B Y q. B Z q :: B Y q. B D q :: B A q. A D q :: B A q. B A q − B Z q. & per conversam

verſam

versam rationem KSq . KSq — Z B q + S N q : : B A q . B Z q . hoc est KSq . KNq – Z B q : : B A q . Z B q . quare permutando erit K S q . B A q : : K N q — Z B q . Z B q . & composite K S q + B A q . B A q : : K N q . Z B q . hoc est A N q . B A q : : K N q . Z B q . quare rursus permutando est A N q . K N q : : B A q . Z B q : : R q . J q . itaque A N . K N : : R . I . unde patet K N ipsius A N refractum fore : Q . E . D.

XIX. Exhinc, ut in priore casu, patet quòd distantiæ (Z I, I K, K L) concursuum æquantur differentiis ipsarum Z B, R M, S N, Γ O ordinatarum ad ellipsim. Et quod Z I, Z K ⊐ I R . K S . &c differentiæ porrò dictæ circa verticem ellipsis Z admodum exiguæ sunt, adeóque propinquiorum axi radiorum refracti circa Z densè congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX Ex his tandem universis colligitur quòd puncti radiantis A imago (respectu scilicet oculi centrum O habentis uspiam in axe A B constitutum) circa punctum Z consistet. Sit enim D δ diameter pupillæ (illa nempe quæ in plano E A F O) & per hujus extrema transeant radiorum A M, A μ refracti I M D, I μ δ ; sanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipsius A N, vel A ν) refractus oculum ingredi poterit ; quin universi tales aliorsùm digredientur, adeóque nec illi quicquam advisum attinebunt ; eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, Fig 46. nedum determinando. Quinimò cùm visus a solis afficiatur radiis intra spatium Z I axem intersecantibus, adeóque velut ab eo procedentibus, intra spatium Z I necessariò versabitur imago ; quia verò ex his qui circa Z concurrunt oculo rectiùs incidunt, ideóque præcipuâ vi pollent ; cùm & ii (uti mox ostendimus) spissiores sint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cùm etiam iidem faciliùs ab oculo rursus in idem punctum recolligantur (id quod posthac aliquatenus ostendemus, & interim ex eo fit verisimile, quòd res per exiguum foramen spectatæ, radiis scilicet obliquioribus exclusis, longè distinctiùs, apprehenduntur) quoniam , inquam, hæc ita se habent, iis perpensis omninò rationi consentaneum est objectum videri ceu radios projiciens à puncto Z, hoc est ejus imaginem inibi consistere Addo, quòd ob exilem pupillæ latitudinem, & propter aliquantam oculi distantiam à refringente ; totum spacium Z I perquam angustum erit, & instar puncti merebitur existimari : quæ cuncta propositum abunde videntur confirmare.

XXI. Accedit

XXI. Accedit tamen ei penitiùs astruendo etiam experientia: quâ nempe compertum habetur; quòd objectum (velut A) in aquâ situm, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ità distans videtur (puta ad Z) ut sit perpetuò A Z quadrans ipsius A B, id quod ratiociniis præcedentibus exquisitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aerem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* se habere circiter, ut 3 ad 4; erit juxta constructionem præmissam ipsius Z B ad A B ratio subsesquitertia; seu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat causæ cur hoc fretus experimento Præclarissimus vir receptam de refractione sententiam impugnaret, & exploderet; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmius adhæreret, expositi Phænomeni causam adeò perspicuam, adeo necessariam suggerenti. quinimò perpendicularem ipsam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è superiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione saltem refringi, tametsi non situ) patebit ad illam attendenti. *Is. Voss.*

XXII Habetur itaque definitus imaginis situs, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præstemus oculi gratiâ extra ipsum ubicunque siti. Sed priùs unum est quod opportunè moneamus, anteà prætermissum; eâdem scilicet operâ quoad radios convergentes simul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorsus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariatis (refringente scilicet & puncto A designatum situm retinentibus) media concipiantur transposita. Nimirum, exempli causâ, si N K sit refractus radii B N versus A tendentis è raro in densum; erit itidem N H ipsi K N in directum positus radii A N B, è raro in densum (quæ nempe prioribus homogenea sint) procedentis refractus. Itaq; quæ de radiis divergentibus ostensa sunt, ea convergentibus, adhibito justo moderamine, pariter adaptari possunt; in horum locum divergentes respectivè congruos subrogando. Quare nedum in hoc casu, sed in omnibus qui sequentur, de radiis solummodò divergentibus instituemus sermonem; eò subintelligentes etiam convergentes ex hâc regula determinabiles referri. Quæ sanè compendio deserviens observatio, generalibus istis supra delibatis meruit intertexi; nec enim ad hanc solam quæ præ manibus, ast ad omnes æquè, quaslibet ad superficies, radiorum inflectiones se extendit. Fig. 47.

XXIII. Adsimilem & indè consequentem (cum paralleli à puncto

proveniant

provcniant infinitè diſſito) circa radios parallelos obſervatiunculam, compendio ſervientem, etiam hîc tempeſtivum fuerit adjungere ; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad poſitionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipſorum concavis partibus incidentium ; modò tranſpoſita concipiantur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes à concavis diſtinguere ; ſeu exinde caſus multiplicare. Res è poſthac dicendis clarior evadet. His admonitis, de tabula jam manum ; & quam propoſuimus inſtituendam proximè diſquiſitionem ſequenti reſervamus.

LECT. V.

I. EO jam provecti ſumus, ut radiantis (à ſenſibiliter finita diſtantia) puncti locum apparentem inveſtigemus, illum nempe qui reſultat, è peracta ad planam ſuperficiem refractione ; nec non reſpectu viſus extra radiationis axem conſtituti. Quorſum imprimis ſpectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille verſatur ; tum ut ſingulare deſignemus in illa recta punctum, circa quod exquiſitè conſiſtit. Utriuſque quæſiti gratiâ conficiendum, (imò penitius excutiendum) venit hujuſmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in poſitione datam rectam E F radiante, deſignandus eſt incidens, qui per alterum tranſeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta A B exiſtat, ad refringentem E F perpendiculari Problema planum erit, ac ità facilè conficietur. In primo caſu (quando ſcilicet I $\sqsubset$ R) fiat A B . Y B :: $\surd$ Iq — R q . I . itemque fiat K B . T :: $\surd$ I q — R q . R ; tum centro Y intervallo T deſcriptus circulus ipſam E F ſecet in N ; connectantunrque A N, K N ; erit K N α ipſius A N refractus.

Itidem in ſecundo caſu (cùm I $\sqsupset$ R) fiat K B . Y B :: $\surd$ R q . — I q . R ; A B . T :: $\surd$ R q — Iq. I . centroque Y intervallo T deſcribatur circulus ipſi E F occurrens in N ; eritque rurſus K N α ipſius A N

A N refractus. Hæc autem è supra positis Theorematis abundè constant. 10 & 13 Lect. 4.

IV. Verum extra casum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema solidum est, pluresque duabus solutiones admittit; id quod facilè perspicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo casu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in secundo) quo posito liquet è præcedentibus obtingere posse nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X transire quod cùm subinde, dico, contingere possit, indè certò consequetur *Problema* solidum esse. Fig. 50.

V. Pro cujus solutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præsertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ sibimet appropriatam habeat, cujus descriptione quàm expeditè construatur; & quidem ità, ut simul indolem suam prodat; possibilitatem, inquam, & impossibilitatem suam; determinationes, & limitationes necessarias; casuum & solutionum varietatem apertè monstret, & velut ob oculos representet. In cujus qualis qualis observationis specimen (alia quædam postmodùm exhibituri) imprimis lineam proponemus hujusce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè describendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; eidémque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam facto A S . A R :: I . R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus stantibus per A quotcunque transeant rectæ secantes ipsam S U punctis H; & centro X, intervallis ipsas A H exæquantibus, describantur circuli secantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ lineæ cum ipsis H A conveniant in N. Per ejusmodi quæcunque puncta transibit proposito nostro deserviens linea (A N N) quam suscepimus describendam; cujusce nimirum cum refringente F F intersectiones ipsissima sunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; subinde tantùm una, cùm E F sic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cùm E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras saltem una erit; quæ satis attendenti manifesta futura subnoto tantùm Fig. 51.

tùm

tùm & levi pede prætereo; quoniam aliunde mox apparitura) sit, inquam, ejusmodi quælibet intersectio N; dico fore XN, ipsius AN refractum. Etenim est I. R :: AH. AT. hoc est (quoniam AH, KX sunt ex constructione pares) I. R :: KX. AT :: NK. NA. unde manifestum, è præmonstratis, est propositum.

Fig. 51.

VII. Veruntamen hujusmodi constructiones *Geometrarum* usus aut non libenter admittit, aut alias saltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas; itaque consuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus; huc utique faciens sequens *Problema Lemmaticum* præmittentes: Dato angulo recto XPF; punctóque quovis Y; per hoc rectam duce e dati anguli cruribus occurrentem, sic ut ab iis intercepta sit æqualis datæ rectæ T. || Expeditissimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y descriptæ; sed enim quoniam & iste modus haud ità Geometricus censetur; adhuc iisdem Geometris obsequentes ità propositum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis; & *Asymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y transiens (si quidem punctum Y existat extra angulum datum, aut istius opposita (sc. punctum Y sit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante descriptus circulus *Hyperbolam* inteersecet in K; & à K demittatur KL ad BP perpendicularis; accipiatur autem BN = PL; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum; vel esse NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbolæ* proprietate est PL × LK = PB × BY. adeóque cùm sit ex constructione BN = PL; erit BN × LK :: PB × BY. adeóque BN. BY :: PB. LK. est autem BN. BY :: DY. DG. ergo est PB. LK :: DY. DG. quare cùm sit PB = DY. erit LK = DG. adeóque (pares LH, DP addendo, vel subtrahendo) est KH = GP. quinetiam est YH = LB = PN (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipsi GN: Q. E. F.

Fig. 52.

VIII. Notandum est autem in casu, quando punctum Y intra datum angulum XPF existit, quòd circulus ille centro Y descriptus subinde designatam hyperbolem binis punctis secabit (quod enim pluribus haud quoquam secabit universim haud ità pridem circa tales ad eadem convexas curvas ostendimus) quo casu patet duas obvenire propositi solutiones, aliquando rursus ille dictus circulus *Hyperbolen* continget; & tum una tantùm per Y duci poterit recta, datam T adæquans; illa scilicet omnium quæ per Y dato angulo interseri possunt minima. Quod si circulus Hyperbolæ non occurrat, *Problema* prorsus ἄπορον

erit.

erit. || Sin punctum Y extra datum angulum existat, evidens est tantùm uno modo problemati satisfactum iri; quódque per alteram intersectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillùm attendenti manifestè constabunt; nihil ut sit opus hic plura verba consumere. verùm ut in horum casuum primo constet (id quod pro sequentibus ex usu erit cognoscere) quando dictus circulus *hyperbolem* contingit; seu quando tantùm una per Y recta quantitatis ejusdem interseri possit, hoc adnectemus *Theorema*.

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF existente demittantur ad ejusdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportione mediæ sint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G transibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF subtendere possunt. Fig. 54.

Quòd NYG sit una recta patet, quoniam est YB.BN::GD.DY (ex constructione nimirum) porrò per Y transeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuóque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR similia fore; quódque propterea est MN.MR:: MNq.MHq::DGq.YDq. item (ob BN, DG, YD ∸) est BN.YD::DGq.YDq. hoc est YN.YG (vel MN.GS) ::DGq.YDq. ergò est MN.MR::MN.GS. adeóque MR = GS. itaque major est GS ipsâ MT; abeóque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergò LM.GH::LZ.GZ. verùm propter angulum LGH recto P majorem, est LZ ⊏ GZ. quare LM ⊏ GH. ast ob angulum rectum GNH est GH ⊏ GN. quare magìs est LM ⊏ GN. eodémque modo quævis per Y ducta major ostendetur ipsâ GN: Q.E.D.

X. Hinc etiam si GN sit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam indè consequetur fore YB, BN, GD, YD ∸. Etenim erit YNq.YBq::GN.YN. & dividendo BNq.YBq::GY.YN::DY.BN. ac indè YBq × DY = BNcub; vel $DY = \frac{BN\,cub}{YBq}$. itáque DY est quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari potest autem, quòd minimæ GN propiores remotioribus

tioribus minores sunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interseri possunt, ad ejus utramque partem singula. nimirum hæc è superiori constructione luculentè patent; pauxillùm expende Sodes; & perspicies; operámque meam non desiderabis.

XII. His præstratis ad *Principale construendum Problema* revertimur;
Fig. 55, 56.
& reliqua detexenda. scilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius est designandus, cujus refractus per datum punctum X transibit. || hoc ità conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares AB, XP. tum in primo casu fiat AB.YB :: $\sqrt{Iq - Rq}$. I. neque non fiat XP.T :: $\sqrt{Iq - Rq}$.R. & per punctum Y transadigatur recta NG subtendens angulum APF, & ipsam T exæquans; & connectantur AN, XN. dico factum; seu rectam XV incidentis AN refractum esse. || Etenim est XP.KB :: NP.NB :: NG.NY. permutandóque XP.NG :: KB.NY. hoc est XP.NG (vel $\sqrt{Iq - Rq}$.R) :: KB.YN. itaque per theorema præmissum liquet KN ipsius AN refractum esse: Q. E F.

Haud absimiliter in secundo casu; fiat XP.YP :: $\sqrt{Rq - Iq}$.R; itémque AB.T :: $\sqrt{Rq - Iq}$.I; angulóque ABF per Y transiens, ipsámque T adæquans inseratur recta NG; connectantúrque AN, XN; factum erit. || Nam ipsam XP protractam secet AN in S. èstque SP.YN :: AB.GN :: AB.T :: $\sqrt{Rq - Iq}$.I. unde consequitur è præmonstratis fore XN ipsius SN refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc, & præmissa respiciendo satis dilucescit non ultra duos ad unas perpendicularis AB partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut supra declaratum) per puntum Y (quod universis hujusmodi constructionibus commune, vel invariatum perpersistit; in primo casu quoad omnes ab A incidentes; in secundo quoad omnes per X transeuntes refractos) plures duabus sibi pares duabus sibi pares rectæ angulo recto XPF, vel ABF interseri nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipsum X transibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago versatur; iste nimirum refractus qui per oculi centrum transit, modo jam exposito ducendus; ipsum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè consistit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in casu primo, punctum Y conditione præditum jam

jam aliquoties insinuatâ; scilicet ut sit $AB.YB::\sqrt{Iq - Rq}.I$; & designetur quilibet refractus KN; tum continuetur ratio YB ad BN; ut sit ad has proportione quarta BP; & per punctum P ducatur recta PZ ad AB parallela; refracto KN occurrens in Z; dico nullum alium refractum per Z transire. Nam si fieri poteſt transeat alius ZR; & per Y traducantur rectæ NYG, RYS; è præmonstratis apparet quòd sit RS *= NG. item è prædictis manifestum est quòd RS * ⊏ NG. quæ repugnant. Fig. 57, 58.

* 12. Lect. 4.
* 9 hujus Lect.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus KN; & fiat $KB.GB::\sqrt{Rq - Iq}.R$; tum adnexâ GN, ad ipsas NG, GB sumatur tertia proportionalis V; & fiat NG.V::BN.NP; & per punctum P ducatur PY ad BA parallela refractum NK decussans in Z; dico nullum alium refractum per ipsum Z meare. Nam, si neges, transeat alius ZR; & per Y trajiciatur RYS; & quoniam $ZP.YP::KB.GB::\sqrt{Rq - Iq}.R$. ex * antedictis apparet fore RS = NG. quinetiam ob NGq.GBq::NG.V::BN.NP. erit dividendo NBq.GBq::BP.NP. hoc est NPq.PYq::BP.NP; inde facile deducitur esse BP quartam proportionalem in ratione YP ad PN; consequenterque fore RS minimâ NG majorem. quod adversatur ostensis. itaque potiùs per Z nullus alius transit refractus: Q.E.D. * 14. Lect. 4.

XVI. Prætereà, si refractum NKZ intersecet alius quilibet MI, ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum M inter B, & N jaceat) intersectio X solitario puncto Z citerior erit (seu perpendiculari KB propinquior). Nam ab X demittatur perpendicularis XQ; ipsam NG secans in γ; & (in primo casu) per M, Y traducatur recta MYH. ergò MH=Nγ. quare minima earum quæ per Y angulo XQF interseri possunt inter puncta M, N cadet (utì nuper admonitum, & adstructum). puta ad φ. ergò quum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad Bφ, erit PB ⊏ QB; adeóque recta XQ rectis ZP, KB interjacet: Q.E.D. Fig. 59, 60.

In secundo casu, per γ trajiciatur recta MγH. ergò cùm sit $QX.Q\gamma::PZ.PY::\sqrt{Rq - Iq}.R$. erit HM = GN. ergò minima per γ ducibilium angulo ABF intercipienda punctis M, N intercidet; puta ad φ. quare QB quarta proportionalis erit in ratione γQ ad Qφ; & est γQ.Qφ ⊏ (γQ.QN.) ::YP.PN. & sim-

simplicibus triplicatas substituendo rationes, est γQ . QB $\sqsubset$ YP . PB. & his æquales rationes adjungendo est QN . γQ + γQ . QB $\sqsubset$ PN . YP + YP . PB; hoc est QN . QB $\sqsubset$ PN . PB. componendóque BN . QB $\sqsubset$ BN . PB. ergo QB $\sqsupset$ PB. unde rursus liquet rectam XQ ipsis AB; ZP interjacere: Q. E. D.

XVII. Consimili prorsus argumentatione constabit obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipsam KN intersecare.

XVIII. Quinimò rursus exertiùs apparet non nisi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipso KN concurrentes refractos circa punctum Z conglomerari, præsertim illos, qui ad partes F (obliquiùs) incidentes pertinent.

Fig. 61. Nam accipiantur, exempli causâ, sibi pares NS, ST; & sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; & BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; & BR itidem quarta talis in ratione YB ad BT; & à punctis P, Q, R erectæ perpendiculares ipsam NKZ secent in Z, X, & V. patet (è mox ostensis) omnium spatio NS incidentium refractos cum NK concurrere intra ZX; nec non omnes ipsi ST incidentium refractos intra XV cum eodem convenire. porrò rectæ BP, BQ, BR se habent invicem ut *Cubi* rectarum BN, BS, BT, (vel sunt in ipsarum BN, BS, BT *ratione triplicata*: nam BP . YB :: BN cub . BY cub . & YB . BQ :: YB cub . BS cub. adeóque ex æquo BP . BQ :: BN cub . BS cub. & consimili ratione BP . BR :: BN cub . BT cub.) undè faciiè monstrabitur esse PQ multo minorem quàm QR; vel ZX quàm XV (verbis parco multis in re satis manifesta). quare dicti refracti circa punctum Z spissiùs ipsum NK decussabunt.

XX. Ex his demùm conficitur, omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto NK uspiam constituto, puncti A imaginem ad ipsum conditione præditum toties insinuatâ punctum Z consistere. Sit enim CD pupillæ (in plano ABC jacens) *Diameter*, *axi Optico* KN perpendicularis; & per ejus extrema C, D transeant refracti IM LR ipsi KN occurrentes punctis X, V. ex ostensis patet omnium intra spatium MN incidentium radiorum refractos intra terminos ZX principalem refractum intersecare; neque non omnes ad spatium

ſpatium N R pertinentes intra Z V eidem occurrere; quinetiam nullius citra punctum M, vel ultra R incidentis refractum (ſeu nullum citra X, vel ultra V cum ipſo K N concurrentem) oculum ingredi poſſe. quare ſaltem imago conſiſtet intra terminos V X; ſiquidem aliunde qui videntur emanare *Radii* nihil quicquam ad viſionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. cæterum quoniam ab V X procedentium (apparenter, inquam, procedentium) reciſſimi, vel axi propriores velut ab ipſo Z procedere videntur (ſeu à loco qui circa ipſum) ipſique proinde validiùs afficiunt oculum, & ab eo faciliùs adunari, recolligique poſſunt; cùm & ii præ cæteris confertim irruant (illi ſaltem qui ad partes N R,) quia denique propter anguſtiam pupillæ ſpatium V X haud ita magnum exiſtit; cùm, inquam, hæc ita ſe habeant, omnino rationi conſentaneum eſt, dictam imaginem circa punctum Z verſari; nec alias arbitror excogitari poſſe veriſimiles cauſas, quæ ſitum ejus determinent. *Alhazenus* quidem, & poſt eum pleraque cohors *Opticorum* ipſam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem A B decuſſat, conſtituit; verùm haud ullam rei natura cauſam ſuggerit, cur inibi ſtatuatur: unicus enim (niſi ſaltem pupilla perpendicularem ipſam A B comprehendat, oculuſque valdè ſit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo viſui minimè ſuffecturus, ingredietur oculum; eadémque punctorum intra K X ipſi K adjacentium eſt ratio; nullus ſiquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque ſubeſt cauſæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, *qui faciens N H æqualem ipſi N A puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulſus quia taliter in reflectione ſe rem habere perſpexit; cui ſimilis cauſa ni fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quanquam ipſos in diverſum euntes) horúmque ſequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout uſu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indiſtinctéque perceptas mortalibus imponere; ſed utcunque quod dixi magis iſta ſententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo caſu refractorum concurſus fit infra angulum ABF; nullus extra illum in ſecundo; proindèque fortiùs hanc quæ objecimus, quàm priorem *Alhazeni* percellunt ſententiam. addo quòd ſimul utraque, ſed præſertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicique ratiocinio; pariter enim ſe res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Diopricis circularibus*; id quod manifeſtè, longéque ſecus tam ab experientiâ, quàm à ratione compertum eſt. quin hanc abunde ſubvertit ac peſſum dat quod ſupra propoſuimus experimentum, nemini non obvium; quod nempe punctum A, oculo in ipſo perpendiculari

Fig. 62.

* D. Hobbius.

lari

lari A B constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) ast pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citeriùs adspectatur, aut ulteriùs. Sed effatum hoc nostrum (eique quoad reliquos in Catoptricis, Dioptricisque casus similes consona) tametsi novitium, & nullâ quod sciam hactenus auctoritate fultum, cùm forsan expositum dilucidiùs, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locóque speciatim evenerit dissertare. Mihi saltem videtur hæc Scientia quoad hanc partem suam, certè palmariam (utì reperitur hactenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodùm vitiosa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63. XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interseremus. Aqueæ Superficiei R S (stagnanti, & immotæ desuper immineat objectum H G; ejus autem punctum G radat perpendiculum E F (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari G B velut ad γ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantiâ) citra lineam B γ aspicitur (velut ad φ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciúmque doctrinam liquidò destruit.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, ast aliam alii) Chimæram inani sunt operâ prosequuti; de quâ *Cartesius* ipse percontanti *Mersenno* sic

Tom. II. Epist. 73. respondit: "Non potest facilè determinari qualem figuram linea visa "in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis ima- "ginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò per- "suaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cùm speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum sortiatur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quotcunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, ni fallor, hinc & promptè possit assignari. verùm hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus.||

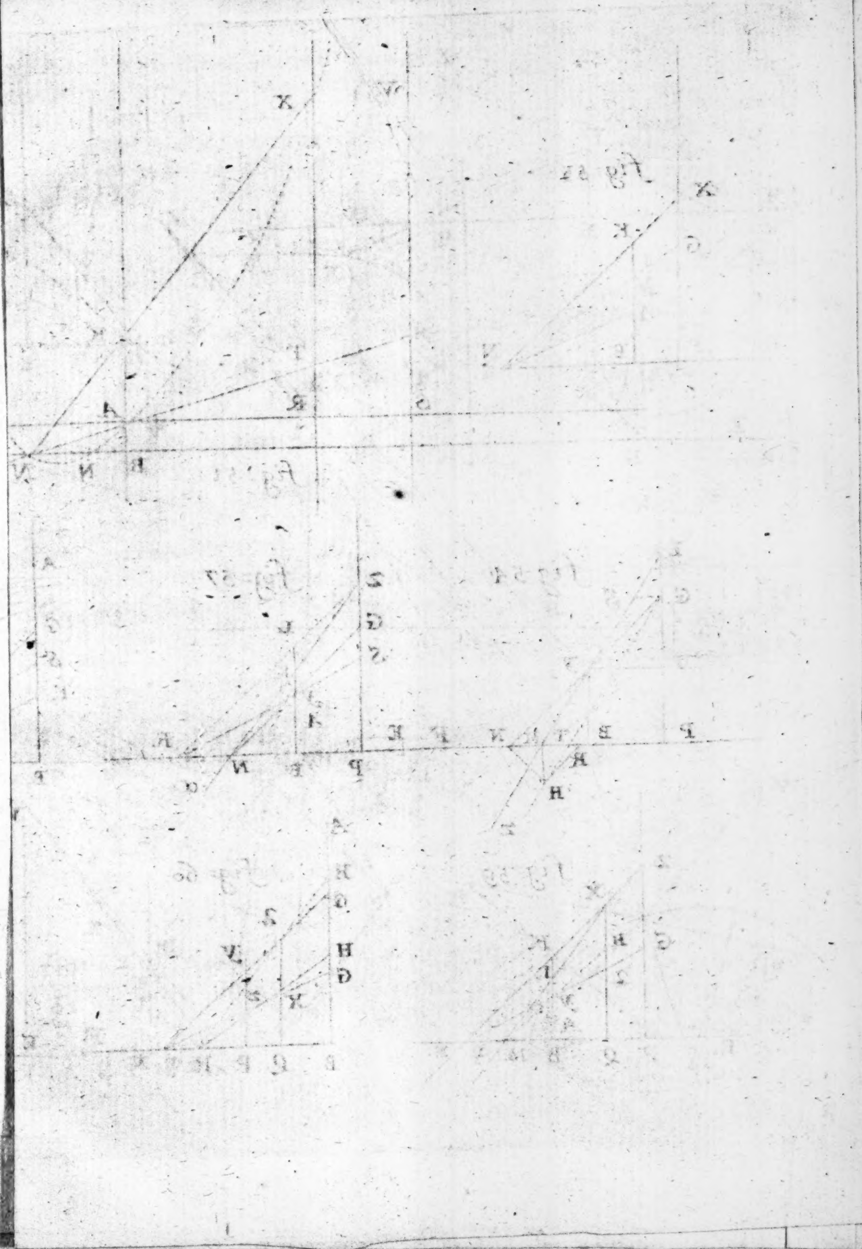


Fig. 6

Tom. I
73.

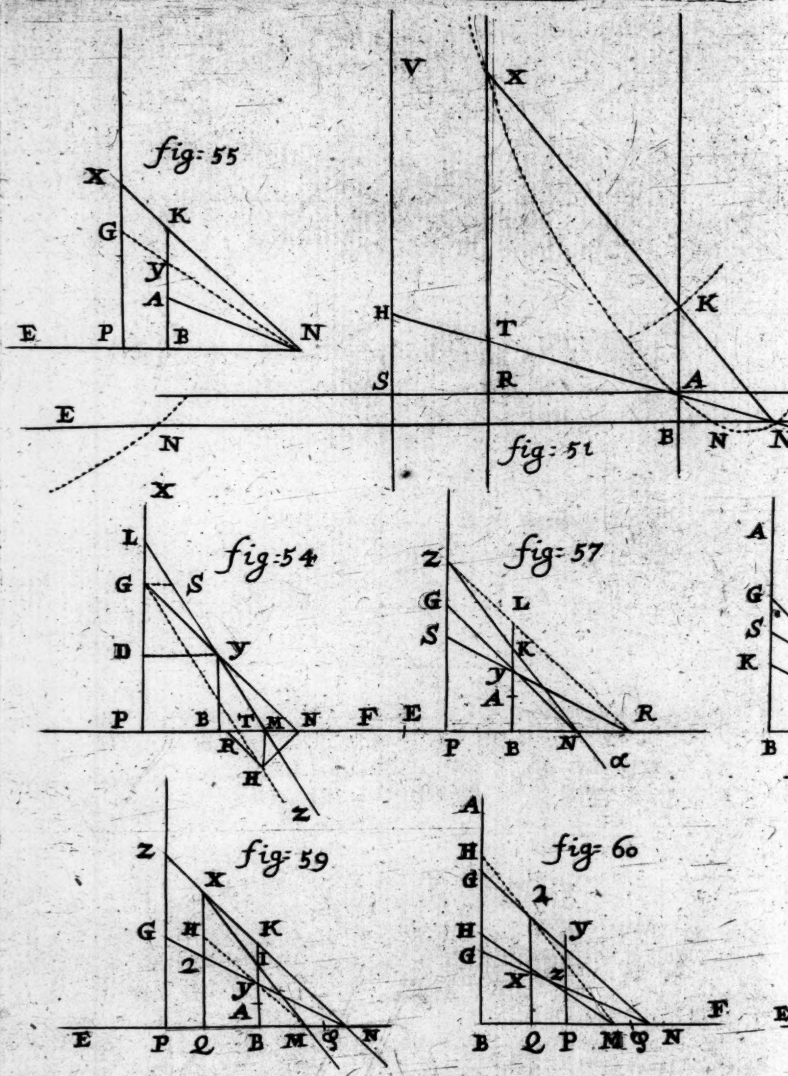


fig: 53

fig: 56

fig: 52

fig: 62

fig: 63

fig: 58

fig: 62
Lect: 6.a

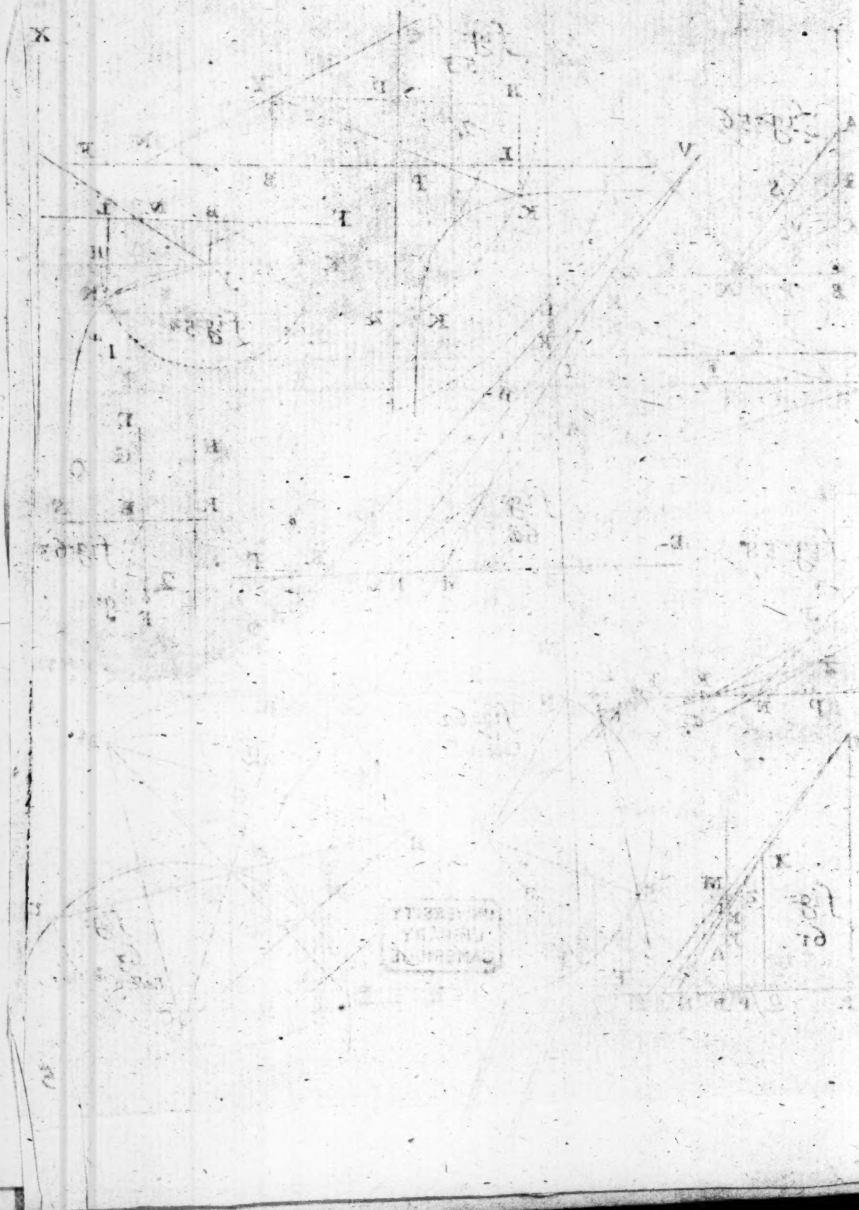
fig: 61

fig: 63
Lect: 6.a

62.

63.

Fig



Tom
73.

LECT. VI.

I. ABsolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam ſuperficiem inflexis (obſervatu quæ videbantur non indigna, cúmque principiis noſtris cohærentia; quæ denuò viam ſternebant, aut methodum aperiebant ſequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excuſſâ re, tam exilem illam & abſtractam deprehendo, ſatius ut exiſtimem actutùm ad particularia deſcendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratiſſimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è veſtigio. pro qua tamen, ob cauſas pridem aſſignatas, circulos ſubrogabo per oculi Sphæræque centra, pérque ſingula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò, *Dioptrica* poſtmodum exequemur. Ad illa.

II. Præſternemus autem λημμάτιον unum vel alterum; hoc imprimìs: Incidentium circulo radiorum obliquior eſt, qui magis à centro diſtat; vel qui minorem arcum (ſubſemicircularem) ſubtendit. ſcilicet obliquiùs incidit recta Q R S, quàm recta M N P. Nam à centro C ducantur C N, C P; & C R; C S. & quoniam angulus R C S angulo N C P (hypotheſi nimirum inſiſtendo) minor eſt; patet reliquos C R S, C S R reliquos C N, P, C P N (cùm junctim, tum ſingulum ſingulo) majores eſſe. Cùm itaque Semidiametri C R, C N, circumferentiæ perpendiculares ſint; omninò liquet propoſitum. Fig. 62.

III. *Dato radio M N ad circulum incidenti congruum reflexum reſignare.* Fig. 63.

Variis modis hoc facilè peragitur; quorum nunc unum adhibere; tunc alium ex uſu ſit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens M N protrahatur ut circulum denuò ſecet in P.; & ſumatur arcus N ϖ = N P; erit connexa ϖ N H ipſius M N P reflexus. nam à centro C connexâ C N, manifeſtum eſt angulum

C N ϖ,

CNϖ, angulo CNP æquari .22. Accepto quovis in NM puncto (puta M) centro C per M describatur circulus MQH; item centro N per M describatur circulus MRH, qui priorem MQH secet in H; erit HNϖ reflexus ipsius MNP. Etenim connexis CM, CH; & NM, NH, ex constructione liquet triangula CMN, CHN, invicem æquilatera fore; proindeque angulos CNM, CNH (& indè reliquos MNR, HNR) æquari 3. protensâ CNR, à quovis in MN puncto, puta M ducatur MG ad CR perpendicularis, & in hac producta sumatur GH = GM; erit conjuncta HNϖ iterum reflexus. Nam connexis NH, NM patet angulos GNM, GNH æquari. verum hi modi sufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

Fig. 63.

IV. Noceturs si fuerit HNP reflexus ipsius MNP fore Nϖ = NP.

V. Dispiciamus jam primò quid ex hujusmodi reflectione contingat puncto ab infinitâ quo ad sensum distantiâ radianti, seu parallelos projicienti radios. quorsum, per circuli reflectentis centrum C protendatur indefinitè recta ABC (hoc autem in sequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejusmodi recta nominetur axis; hic *Speculi*, posteà *Diaphani*) bisecetur autem Semidiameter CB in Z; & per Z transeat recta ZY ad CB perpendicularis, indefinitéque protensa; tum quilibet incidat axi parallelus radius MNP ad N; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque casu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iste qui in illo productus erit) connexáque CN ipsam ZY intersecet in V; fiátque CK = CV; ducatúrque NK; erit NK ipsius MN reflexus (vel reflexi productus) Nam ducatur NQ ad CB perpendicularis, & connectatur CP. éstque CZ.CK :: (CZ.CV ::) CQ.CN. quapropter antecedentes duplicando CN.CK :: PN.CN. item angulus KCN æquatur alterno CNP. ergò triangula CKN, NCP similia sunt; adeoque KN = KC. igitur è suprà generatim ostensis patet fore KN, ipsius MN reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujusmodi quotcunque reflexos quàm expeditissime designandi; quin & ipsorum erga se rationes ac respectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facilè dilucescunt; corollariis nempe subjectis comprehensa.

VII. 1. Patet punctum Z, Semidiametrum CB bisecans, esse metam

metam infra quam nullus reflexus axem secat (vel perpendicularis ipsius reflexum BZ ad Z terminari). quia semper $Cv \sqsubset CZ$, adeóque $CK \sqsubset CZ$.

VIII. 2. Patet esse $KN = KC$.
3. Patet fore PN ($2CQ$), CN, CK ÷÷.

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet secantem CE distantiæ CK duplam esse; & $EN = 2KZ$.

X. 5. Manifestum est incidentis ad F (hoc est ad distantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B transire; proindéque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra spacium BZ decussare; sed omnes *extra* BF reflexos ultra B cum eo convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perspicuum est duorum hujusmodi quorumvis ad easdem axis partes incidentium (ut ipsorum MNP, QRS) reflexos (ut GNK, HRL,) productos se prius decussare, quàm axem. Nam, ductis CR, CN, est $C\varsigma \sqsubset Cv$, adeóque $CL \sqsubset CK$. unde necessariò rectæ NK, RL, se decussabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipsi convexis partibus incidentium reflexi, NG, RH, antrorsum procurrentes divergunt; adeóque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde speculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum GXR (vel KXL) à duobus reflexis comprehensum æquare duplum angulum NCR (hoc est duplum excessum angulorum incidentiæ). Nam ang. $KXL =$ ang. $ALR -$ ang. $AKN = 2$ ang. $ACR - 2$ ang. $ACN = 2$ ang. NCR.

XIV. Pro Sequentibus hujusmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam ABC recta AD bisecet angulum BAC; dico fore $AB + AC \sqsubset 2AD$. Fig. 66.

In *Isoscele* res clara est; in alio proinde sit $AC \sqsubset AB$; centróque A per B ducatur circulus BXY secans ipsam. AD in X, & AC in Y. Subtensa BX ducatur, ipsamque AC secet in V; fiátque VT ad AD parallela. denuò subtensa XY connectatur. Et quoniam ang. XVC major est angulo XYV, vel angulo BXD, vel ipso

BVT, patet rectam VT angulum XVC secare. item ob angulum XYV obtusum, est $XV \sqsubset XY = BX$. ergo $BV \sqsubset 2\,BX$; & $VT \sqsubset 2\,XD$. Verùm ang. VTC (major ipso TVB, vel ipso DXB) est obtusus; adeóque $VC \sqsubset VT$; itaque magìs $YC \sqsubset 2\,XD$. ergò $AB + AY + YC \sqsubset 2\,AX + 2\,XD$. hoc est $AB + AC \sqsubset 2\,AD$: Q. E. D.

XV. Quò paralleli radii rectiùs (vel axi propinquiùs) incidunt, eò reflexorum concursus ad axem sibi viciniores sunt.

Fig. 67. Nempe sumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit $ML \sqsubset LK$. Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis v, η, ξ. Est itaque (juxta *Lemma* præcedens) $C\xi + Cv \sqsubset 2\,C\eta$; hoc est, $CM + CK \sqsubset 2\,CL$. quare $CM - CL \sqsubset CL - CK$; hoc est $ML \sqsubset LK$: Q. E. D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujusmodi reflectione magìs magísque constipari; maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis ipsius quasi reflexus terminatur. unde potissima constat ratio, quare concavis à speculis ad solem expositis circa punctum Z *Ignis* accenditur; enimverò condensatior, ínque spacium arctius quasi compressa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

Fig. 68. XVII. Quinetiam ex his consectatur, longinqui puncti imaginem oculo in axe constituta circa punctum Z consistere. Sit, inquam, BCO axis Opticus; oculíque diameter $D\delta$ (in plana nempe circuli propositi sita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, $VK\delta$ (ad incidentes MNP, $\mu\nu\varpi$ pertinentes). jam abunde manifestum est imaginem conspicuam intra KZ spatium versari. Nam alterius cujusvis hinc, vel indè cadentis reflexus (seu ipsius RS, vel $\rho\sigma$) oculum omnino transgredietur, adeóque nihil quicquam ad visionem ipsam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui scilicet oculum ingredientes suo quisque modo visum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectiùs incidunt oculo, magísque pollent idcircò; nec non iidem propterea faciliùs ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi consonum est isthic præsertim imaginem consistere; siquidem velut ab eo plures, ac efficacissimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pupillæ

pillæ latitudinem, ipsum spatium K Z non ità magnum esse, quin instar *Puncti* possit censeri. Quibus expensis luculentè constare videtur propositum.

XVIII. Subdo tantùm, si oculus usquam intra spacium Z B statuatur, visionem indè confusam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (seu rectissimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis novissimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto distat intervallo, quanto punctum radians ab eodem semovetur; ità quidem ut Sol ex hujusmodi reflectione conspicuus ad tantam, quantam directè spectatus, distantiam (eorum insistendo sententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim si Soli exponatur *Speculum* R B ρ (concavum, aut convexum) sic ut ei Sol quasi perpendiculariter immineat, oculúsque prope axem B C constituatur uspiam; ferè circa punctum Z, arbitrante sensu, luculenta Solis imago sese præbebit oculo conspiciendam; id quod juxta ratiocinium nostrum necessariò debuit evenire. verùm hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuscunque ratio verisimilis constabit) ubique se objiciet refutandum. hîc itaque pluribus parco; pergóque versus oculum extra radiationis axem positum; postquam unicam hanc præcedentibus adnexam obnservationem subjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum visibile clariùs atque distinctiùs repræsentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe subtensam N V insistant imparium circulorum segmenta N B V, N b v; quorum axis A D; & in hoc circulorum centra C, c; constat ut minoris peripheriam N b v extra majoris N B V jacere; ità majoris centrum C infra minoris centrum c existere. bisecentur jam Semidiametri C B, c b in Z, z; ducantúrque tangentes B T, b t; bísque ductæ C N, c N occurrant punctis E, e; denuò radii P N axi paralleli sit ad peripheriam N B V reflexus N K; ad ipsam verò N b v sit ejusdem reflexus N k; liquidissimè jam patet quòd sit N e ⊏ N E; hoc est quòd dupla z k major sit duplâ Z K; adeóque simpla z k major simplâ Z K. majoris itaque Sphæræ portio strictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeóque potentiùs operatur; eâdemque de causa rem objectam illustriùs atque distinctius Fig. 69.

distinctius exhibet obtuenti. quod erat propositum ostendere. Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe situm suffecerit attigisse. Superest ut idem oculi gratiâ secùs constituti pertentemus. id operis sequenti deputamus.

LECT. VII.

I. ID nunc agimus, ut ab infinito quoad sensum intervallo radiantis puncti, è reflectione circularem ad peripheriam peracta oriundæ imaginis, oculi respectu præter axem siti, locum exquiramus. quocirca primùm ipsa recta linea determinanda venit, in qua locus iste versatur; tum ipsissimum præcisè punctum est designandum. In primi verò propositi gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente BNP (cujus centrum C) rectâque CB positione data; designandus est huic parallelus radius, cujus reflexus per datum transeat punctum.

Fig. 70. III. Si datum punctum (puta K) in ipsa CB existat, facilimè peragitur negotium. nam si centro K, intervallo KC describatur circulus, ipsi reflectenti occurrens in N; erit KN reflexus ducti ad CB paralleli; prout ex antedictis abunde perspicuum est.

IV. Si datum punctum (puta jam X) in ipsa reflectentis circumferentia verfetur; arcûs trisectione statim exhauritur *Problema*. Nam ducatur XH ad BC parallela (quæ quidem ipsa uno modo problemati satisfacit) & interceptus arcus XH secetur punctis N, P, ut
Fig. 71. sint arcus XN, NP, PH æquales inter se; connectantúrque rectæ XN, NP. dico factum. etenim ducantur CN, XP; & patet angulum CNX ipsi CNP æquari; adeóque fore XN reflexum ipsius PN; quinetiam ang. NPX æquatur angulo HXP; proindéque NP ipsi XH, hoc est ipsi BC, parallela est. itaque factum.

V. Verùm

V. Verùm extra caſus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀπεργασθέντας) *Problema* magìs ſolidum eſt; in ſummo quippe gradu tale; quatuórque ſubinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi poteſt (ut alia pleraque, ſicutì pridem admonitum nobis) ſibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditiſſimè per puncta deſcribendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectatúrque recta XC; & ſuper hanc ceu diametrum deſcribatur circulus XICI. tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC ſecantes punctis I, rectámque GF punctis H; & adſumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ità ſcilicet ut puncta I rectas NH perpetuò biſecent) perque puncta quotvis ejuſmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quà certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis noſtri conſtructioni deſervit, ejúſque liquidò naturam patefacit; ſiquidem ejuſce cum dati circuli interſectiones N (illæ verò ſubinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim interſectionibus adnumero) nonnunquam Solummodò duæ; prout datus circulus magnitudine præditus eſt aliâ ac aliâ; quæ ſtrictim adnoto tantùm, animum advertenti manifeſtè conſtitura) poſſibiles quaſque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipſo X ad ejuſmodi quamvis interſectionem N recta XN; & per N tranſeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexáque CN circulum XIC ſecet in I, rectámque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è deſcriptæ lineæ naturâ ſeu conſtructione eſt $IH = IN$; angulúſque CIX, in Semicirculo, rectus eſt; erit $XN = XH$; vel ang. $XNI =$ ang. XHI. atqui ang. XHI alterno HNP par eſt. quapropter anguli XNI, HNP pares ſunt. adeóque recta NX ipſius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. ſic, inquam, enodari poterat id Problematis. at quoniam (ut innuebam ſuprà) *Geometrarum palato minùs ſapiunt hujuſmodi Problematum inuſitatæ ſolutiones*; aliter id (ſatis breviter atque perſpicuè) dabimus effectum hoc ſaltem eò faciens Lemmaticum Problema præmittentes. Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus poſitione data diameter GF) & puncto C in ejuſce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id ſic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipſas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inſeratur recta RS par ipſi P (id autem quomodò præſtandum, edocuimus ſuprà) tum per C ducatur

ducatur CHL ad RS parallela; erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG; & huic perpendicularis ducatur GT; ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeoque fore CT. CG :: SR. SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG. GH :: SF. FG. erit igitur ex æquo CT. GH :: SR. FG. (hoc est) :: FG. Z. verùm est CT. FG :: CH. FH :: HG. HL. permutandóque CT. HG :: FG. HL. quare FG. Z :: FG. HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q. E. F.

Fig. 73, 74. Plures esse casus possunt; ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (idque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non sit opus.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectísque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quo punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum; nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interseri; subinde tantùm duæ, quando data tali minimæ cedit; ità respectivè Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hîc data Z, eò minor evadet intercepta RS; & vicissim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inseri possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, & Semicirculum GEF comprehendi possunt. unde *Porismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit; & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satìs videtur. jam ad principalis quæsiti resolutionem accedimus; ità jam brevitur propositi.

Fig. 73, 74. VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela; tum ex C prjoiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL æquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum secet in N; ductæ

ductæ X N reflexus (puta N P) ipsi B C parallelus erit. Nam connexis X C, X L; quoniam C N = H L; & C X = L X; & anguli X C L, X L C pares sunt; erit X H = X N. quapropter erit N P ad X H, vel B C parallelus: Q. E. F.

IX. Ex hac constructione, cum præmissi lemmatis solutione collatâ dilucescet hujusmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu X, transire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam si C N major sit, quam ut ei par H L rectâ G F, Semicirculóque G E F intercipi possit; quòd ad axis partes, ad quas ipsum X ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam si C N tanta sit, ut ei par una tantùm ejusmodi recta possit intercipi, quòd unicus per ipsum X reflexus iter suscipiet. tales, inquam, expositi problematis determinationes hanc constructionem haud obscurè sequuntur; quas certè tu meliùs uno mentis (haud dormitantis) ictu perspexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro. Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (seu rectas) satis definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, respectu visûs utcunque positione datum centrum habentis, consistit. ad ejus jam præcisiorem locum investigandum accingemur; in istarum rectâ quâpiam existentem.

XI. Huc adnotetur imprimìs, quòd si duorum ad easdem axis partes incidentium parallelorum (N P, R S) reflexi sint N ϖ, R σ; erit arcus N R, vel P S arcûs $\varpi\sigma$ subtriplus. Concurrant enim dicti reflexi in X; & Connectatur recta R ϖ. & quoniam, è præmonitis, angulus N X R duplus est anguli arcui N R ad centrum insistentis; erit idem angulus N X R anguli N ϖ R quadruplus. quapropter erit ang. N X R — ang. N ϖ R triplus anguli N ϖ R, hoc est angulus X R ϖ anguli N ϖ R triplus. unde quoque triplus erit arcus $\varpi\sigma$ ipsius N R: Q. E. D. Fig. 76.

XII. Iisdem stantibus dico fore R X (obliquioris reflexi partem incidentiæ concursûsque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi R σ. Nam, ductis subtensis N R, $\varpi\sigma$; erit 1.3 :: arc. N R . $\varpi\sigma$. $\sqsupset$ recta N R . $\varpi\sigma$ :: R X . X ϖ $\sqsupset$ R X . X σ (quia scilicet est X ϖ $\sqsubset$ X σ) . igitur est X σ minor triplâ R X; componendóque minor erit R σ quadruplâ R X: Q. E. D.

XIII. Item

XIII. Item, dico fore NX (rectioris itidem reflexi concursûs incidentiæque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius Nϖ. Etenim fiat ang. $HR\varpi =$ ang. $N\varpi R$; quapropter erit $HR = H\varpi$; adeóque $2H\varpi = HR + H\varpi \sqsubset R\varpi \sqsubset N\varpi$. item quoniam ang. $RHN = 2$ ang. $HR\varpi =$ ang. XRH; est $XH = XR \sqsubset XN$. quum itaque sit Hϖ major semisse totius Nϖ; & XH major semisse residui NH; liquet totam Xϖ majorem esse triplâ XN; seu totam Nϖ majorem esse quadruplâ NX: Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit NZ reflexi Nϖ quadrans, quòd nullus alter hujusmodi reflexus punctum Z permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior is fuerit, $NZ \sqsupset \frac{1}{4} N\varpi$; sin rectior fuerit, erit $NZ \sqsubset \frac{1}{4} N\varpi$ (nimirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypothesi.

Fig. 77. XV. Quinetiam ipsi Nϖ propiùs adjacentium occursus puncto Z viciniores sunt, hinc indè. Secent, inquam, radiorum LM, RS reflexi Lμ, Rσ ipsam Nϖ punctis Y, X; istæ quidem (rectior) in Y, hic (obliquior) in X; erit $ZY \sqsupset ZX$. Nam connectantur Rϖ, Lϖ; & fiat ang. $\varpi LH =$ ang. $N\varpi L$; ducantúrque rectæ RH, RY. estque $RH \sqsubset LH = H\varpi$; adeóque ang. $H\varpi R \sqsubset$ ang. $HR\varpi$; & proinde ang. $NHR \sqsupset 2$ ang. $H\varpi R$. item $YR \sqsubset YL = YH$; proindéque rursus ang. $NYR \sqsupset 2$ ang. YHR. quare multo minor est ang. NYR quadruplo NϖR est autem ang. NXR quadruplus anguli NϖR; igitur ang. $NXR \sqsubset$ ang. NYR. ponatur jam, si fieri potest, punctum X ipsis Y, Z interjacere. erit igitur angulus externus NYR interno NXR major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potiùs est $ZY \sqsupset ZX$: Q. E. D.

Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sese priùs (velut ad φ) quàm ipsum Nϖ decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem destinatum attingamus scopum) è dictis

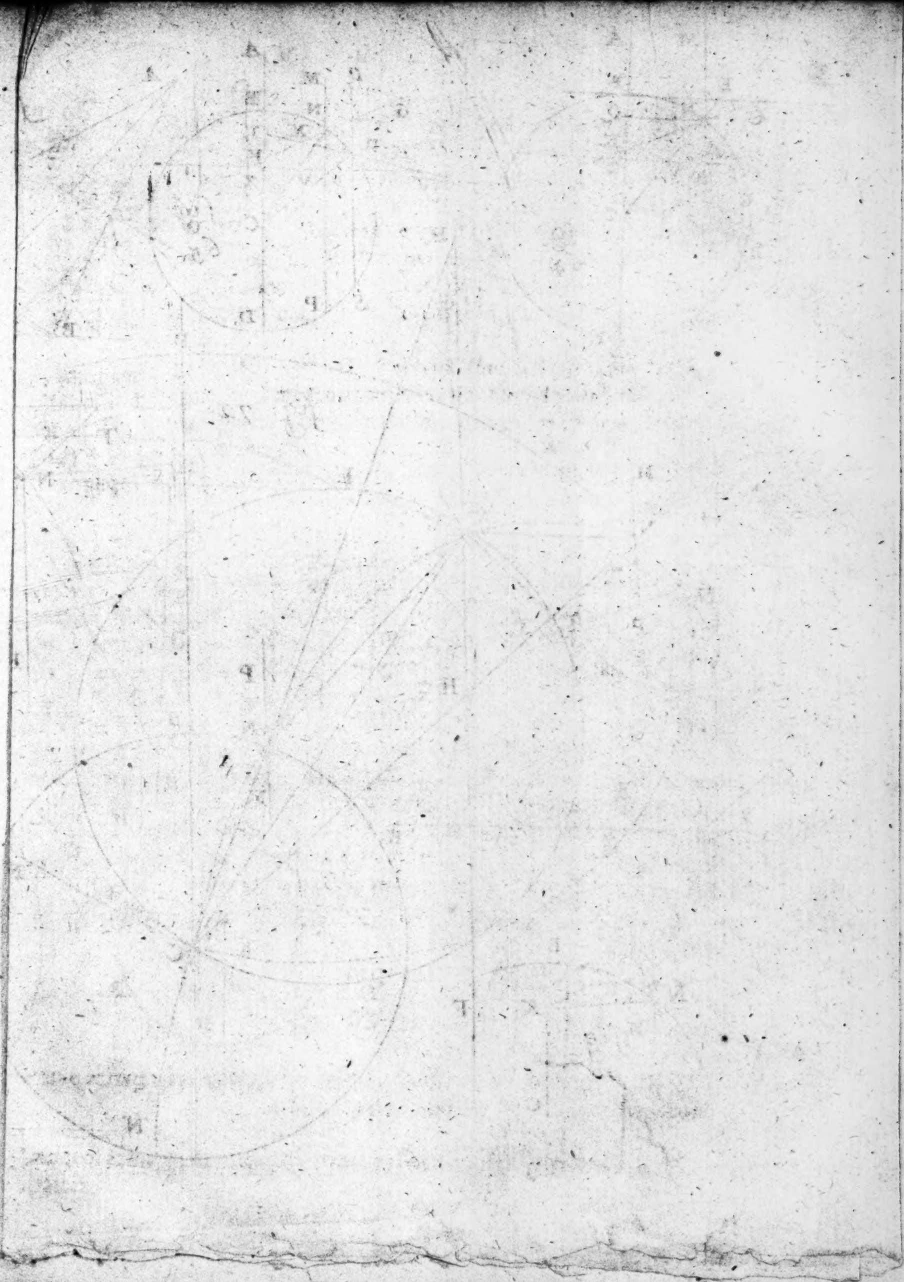
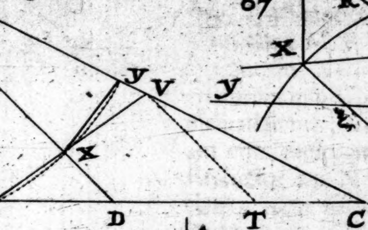


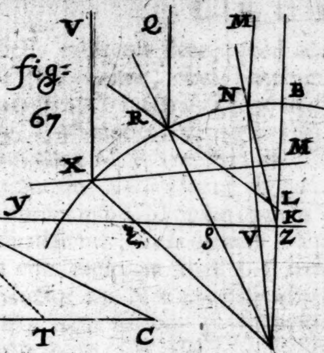
fig: 64

fig: 65

fig: 72

fig: 70


fig: 66
y
V
x
D
T
C


fig: 67
V
Q
M
N
B
R
M
X
y
L
K
Z
V

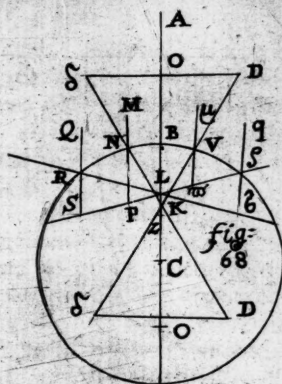
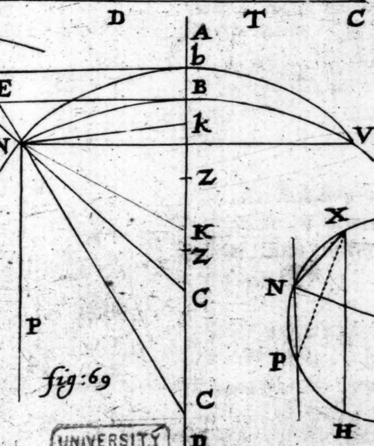
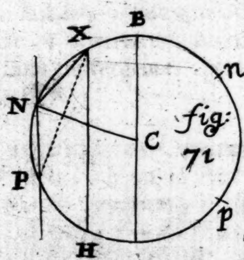
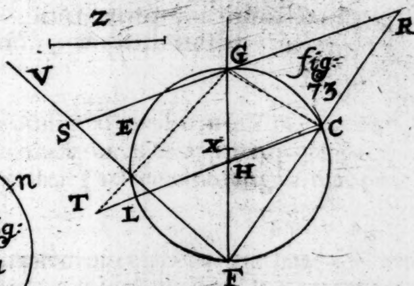
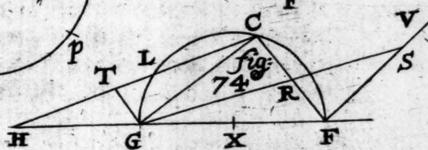

A
O
D
M
N
B
V
L
K
P
fig: 68
C
D
O

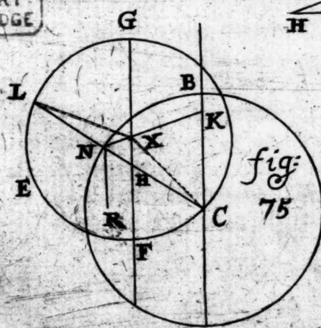
fig. 78.

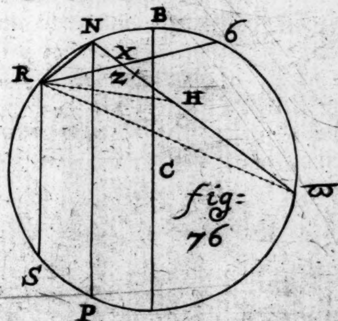

A
b
E
B
k
N
V
Z
K
C
P
fig:69
C
D

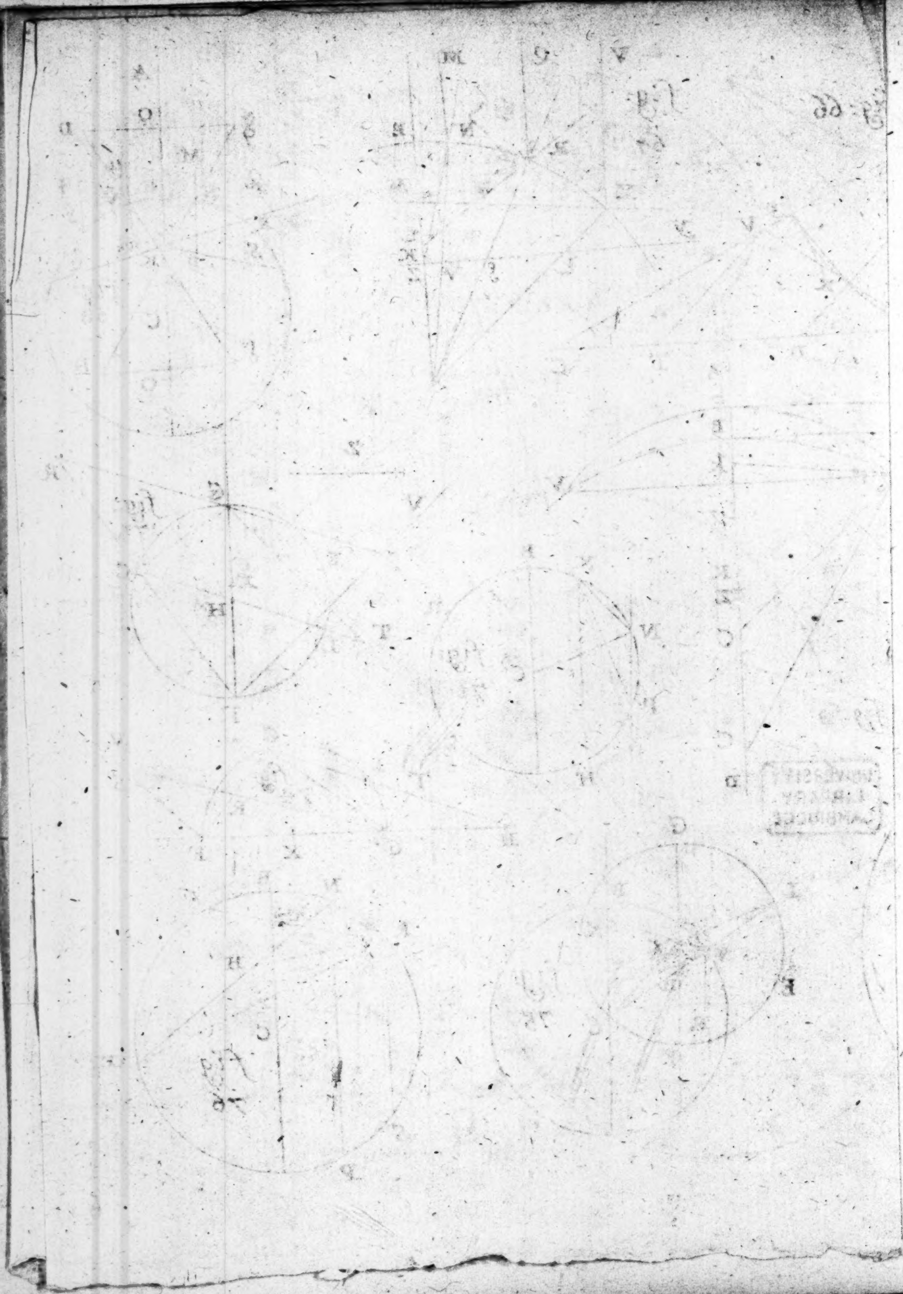

X
B
n
N
C
fig: 71
P
p
H


Z
R
G
V
fig: 73
S
E
C
X
H
T
L
F


C
V
L
fig: 74
T
R
S
H
G
X
F


G
L
B
K
X
N
E
fig: 75
R
C
F


N
B
X
R
Z
H
C
fig: 76
S
P



è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uspiam in ipsa N ϖ ponitur, circa punctum Z (ipsam N ϖ prænotato modo quadrisecans) radiantis imago conspicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter E F; per eujusce terminos transeant radiorum L M, R S reflexi L E, R F; quorum iste secet ipsum N ϖ in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso R S, rectiorum ipso L M nullus oculum intrabit; utì suprà non semel argumentati sumus, intra spatium X Y necessariò consistet imago. quinetiam cùm radiorum arcui L R incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N ϖ propiùs adjacentes perpendiculariùs oculum feriunt, idque spissiùs (ut ex analogia par est existimare; nec enim id operosiùs aggrediar demonstrare) propter aliquoties expositas causas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc est ad ipsum imago consistet. Accedit quod ob angustiam pupillæ spatium X Y satis modicum existit; ut puncti modum vix excedere videatur. Fig. 78.

XIX. Subdo; si statuatur oculi centrum uspiam in Z N; ísque versus partes N obvertatur; objectum confusiùs apparere; quippe cùm reflexi visum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone visum consistit.

XX. Hinc à speculo Cavo tantùm una repræsentatur Imago, saltem bene distincta. Nam in duorum reflexorum N ϖ, R ρ concursu X statuatur oculi centrum; & sit $R\zeta = \frac{1}{4} R\sigma$; unde $R\zeta \sqsupset RX$. itaque spectabitur quæ ad ζ imago ab oculo in X collocato, versúsque partes N R obverso; sed tum imago Z post oculum consistit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, serióquè perpensa vix addubito quin facilè sibi fidem conciliatura sint; nihil ut sit opus adversantia *seu veterum Opticorum decreta, seu recentiorum Commenta pluribus convellere*; quæ certè cùm nullâ perspicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque discordant. Cætera verò siqua restant ad hoc argumentum spectantia studio vestro commendabimus elicienda; mox ad è sensibiliter finita distantia radiantis puncti *Symptomata* similiter exploranda animum adjecturi.

Lect. VIII.

I Quæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeóque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circularem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem intersecant; quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibiliter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fretus *Opticorum* exemplo, præsertímque majoris evidentiæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusiùs imprimis, hunc aliquanto concisiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, ísque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursurum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC secare; nec non ideò trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore AC.AN::KC.KN. Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang. KHN = CNP = CNK = NKH. hoc etiam è superius generatim ostensis consectatur: adeóque NH = NK. itàque cùm sit AC.AN::KC.HN. erit etiam AC. AN::KC.KN.

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore NH = NK; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse HK.HN::NP. CN.

V. Porrò, constantibus iisdem, dico fore AC.KC::ACq — ANq. CNq. Nam est NP.CN + AN.CN = HK.HN + AN.CN = HK × AN.HN × CN = AN.HN +

+ HK . CN . = AC . KC + AK . AC = AK . KC . verùm est NP . CN + AN . CN = NP × AN . CNq . ergò erit AK . KC :: NP × AN . CNq . componendóque AC . KC :: NP Fig. 79, 80.
× AN + CNq . CNq . cùm sit igitur NP × AN = AP × AN — ANq . & AP × AN = ACq — CNq ; adeóque NP × AN + CNq = ACq — CNq — ANq + CNq ; = ACq — ANq . erit AC . KC :: ACq — ANq . CNq : Quod E. D.

Coroll. AK . KC :: AN × NP . CNq .

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus : Si fiat 2 CA . CN :: CN . E . & 2 CK . CN :: CN . F ; & sumatur CQ = E + F ; erit ducta NQ ad CA perpendicularis . vel reciprocè ; posito quòd sit NQ ad CA perpendicularis ; erit CQ = E + F . Nam (ut hoc posterius ostendamus) quoniam est 2 CA . CN :: CN . E . & CN . 2 CK :: F . CN . erit ex æquo perturbatè 2 CA . 2 CK :: F . E . vel CA . CK :: F . E . componendóque CA + CK . CK :: F + E . E . Porrò quoniam est ANq = ACq + CNq — 2 AC × CQ ; erit 2 AC × CQ — CNq = ACq — ANq . itaque (juxta præcedentem) erit 2 AC × CQ — CNq . CNq :: AC . CK . hoc est (ob CNq = 2 AC × E) 2 AC × CQ — 2 AC × E . 2 AC × E :: AC . CK . hoc est CQ — E . E :: AC . CK . vel componendo CQ . E :: AC + CK . CK . erat autem AC + CK . CK :: F + E . E . ergò CQ = F + E : Quod E. D.

VII. Ex istis porrò deducetur , si dividatur Semidiameter BC in Z , ut sit AC . AB :: CZ . BZ ; punctum Z limes erit citra quem (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit . Cujusvis , inquam , radii AN esto reflexus GN ; axi occurrens in K . dico fore CK ⊏ CZ . Nam ob hypothesin (permutandóque) est AC . CZ :: AB . BZ . igitur (antecedentes , & consequentes copulando) AC . CZ :: AC + AB . CB . quare (posterioris hujusce rationis utrumque terminum in æquales AC — AB , & BC ducendo) erit AC . CZ :: ACq — ABq . CBq . est autem ACq — ABq ⊏ ACq — ANq ; adeóque ACq — ABq . CBq . ⊏ ACq — ANq . CBq :: AC . CK (è mox ostensis hoc) quapropter erit AC . CZ ⊏ AC . CK . indéque CK ⊏ CZ : Fig. 81, 82.
Q. E. D.

VIII. Aliter hoc idem ; ut quibusdam fortasse videbitur , minùs involutè : per N ducatur VT circulum contingens . & quoniam NT

bisecat angulum ANK; erit $AN . NK :: AT . TK . \sqsupset AB . BK$. quare $BZ . AB + AN . NK \sqsupset BZ . AB + AB . BK$ (communem adsciscendo rationem BZ ad AB). est autem $BZ . AB + AN . NK = CZ . AC + AC . CK = CZ . CK$ & $BZ . AB + AB . BK = BZ . BK$. ergo $CZ . CK \sqsupset BZ . BK$. permutandóque $CZ . BZ \sqsupset CK . BK$. quin & componendo $CB . BZ \sqsupset CB . BK$. ideóque $BZ \sqsubset BK$; quare punctum Z centro propinquius est, quàm ipsum K: Q. E. D.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ fuerint limites punctorum radiantium A, α (quorum A sit à speculo remotiùs, quàm α) erit $CZ \sqsupset C\zeta$. Nam est $BC . AB \sqsupset BC, \alpha B$. adeóque compositè $AC . AB \sqsupset \alpha C . \alpha B$. hoc est $CZ . BZ \sqsupset C\zeta . B\zeta$. quare componendo $BC . BZ \sqsupset BC . B\zeta$. & indè $BZ \sqsubset B\zeta$.

IX. Porrò, consectatur è præmissis, quòd si duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem intersecent punctis K, L; erit $CL, CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$. || Nam quoniam est $AC . CK :: ACq - ANq . CBq$. itémque $CL . AC :: CBq . ACq - ARq$. erit ex æquo perturbatè $CL . CK :: ACq - ANq . ACq - ARq$.

X. Simili planè discursu, si fuerit $AC . AB :: CZ . ZB$; erit $CZ . CK :: ACq - ANq . ACq - ABq$. & $CL . CZ :: ACq - ARq . ACq - ABq$.

XI. Hinc perspicuum est obliquioris reflexi concursum à centro magìs elongari quam rectioris; quòd nempe sit $CL \sqsubset CK$. Cùm enim sit $ACq - ANq \sqsubset ACq - ARq$; erit $CL \sqsubset CK$.

XII. Hinc necessariò duo quilibet ad easdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) sese prius quam axem intersecabunt, puta ad X, quo posito.

XIII. Adnotari potest angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus inclusum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ, vel, duplo angulo NCR unà cùm ang. NAR. || Etenim
Fig. 83. ang. $KXL =$ ang. $ALR - AKN =$ ang. $ACR + CRL -$: ang. $ACN + CNK =$ ang. $ACR - ACN +$: ang. $CRL - CNK =$ ang. $NCR +$: ang. $CRS - CNP$. || Quinetiam ang. $CRS - CNP =$ ang. $RCA + CAR -$: ang. $NCA +$

CAN

CAN = ang. NCR + NAR. itaque rursus ang. KXL = 2 ang. NCR + ang. NAR. liquent igitur quæ proposita sunt; in usum (si fortè) sequentium. pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè Fig. 83.
procurrentes à se divergere; adeóque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire; consequenter & puncti A tantùm unam à convexo speculo imaginem exhiberi.

XV. *Lemmatia* 1. Sint quæcunque tria quanta A, B, C; primóque sit $A.B \sqsubset B.C$; dico fore $A + C \sqsubset 2B$. ponatur enim fore $A.B :: B.E$. erit ergò $A + E \sqsubset 2B$. quinetiam erit ergò $B.E \sqsubset B.C$ adeóque $C \sqsubset E$. ergò magis $A + C \sqsubset 2B$.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundò $A + C \sqsupset 2B$. dico fore $A.B \sqsupset B.C$. nam sive dicatur esse $A.B :: B.C$. vel $A.B \sqsubset B.C$. sequetur utrobique fore $A + C \sqsubset 2B$; contra hypothesin. itaque potiùs est $A.B \sqsupset B.C$.

XVI. Etiam hoc adjungo. Si duo sumantur ad easdem axi partes Fig. 84.
(circulíque convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX; & ducantur rectæ AN, AR, AX; erit $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$.

Nam ducantur CN, CR, CX; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG; sint item NP, RQ ad AC parallelæ ducantúrque subtensæ NR, RX.; & quoniam ang. $RXQ \sqsubset$ ang. NRP; patet esse $RX.RQ \sqsupset NR.NP$, adeóque cùm $RX = NR$, erit $RQ \sqsubset NP$; hoc est $FG \sqsubset EF$. ergò $2CF \sqsubset CE + CG$; unde $4AC \times CF \sqsubset 2AC \times CE + 2AC \times CG$ atqui est $ANq = ACq + CNq - 2AC \times CE$. & $AXq = ACq + CNq - 2AC \times CG$. & $2ARq = 2ACq + 2CNq - 4AC \times CF$. ergo $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$.

Addo, sequentium gratiâ, si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes; & reliqua similiter apparentur; fore contrà, tum $ANq + AXq \sqsupset 2ARq$. nam in eo casu est $ANq + AXq = 2ACq + 2CNq + 2AC \times CE + 2AC \times CG$. & $2ARq = 2ACq + 2CNq + 4AC \times CF$. unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus

NR,

NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi GN, HR, IX
Fig. 85. axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab obliquiorum occursibus conclusum majus ipso LK rectiorum occursibus intercepto.

Nam quoniam est $ANq + AXq \sqsubset 2ARq$. erit $2ACq - ANq - AXq \sqsupset 2ACq - 2ARq$. adeóque $ACq - AXq . ACq - ARq \sqsupset ACq - ARq . ACq - ANq$. hoc est, è præmonstratis, $CL . CM \sqsupset CK . CL$; vel inversè $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quapropter erit $CM + CK . \sqsubset 2CL$, & ideò $CM - CL \sqsubset CL - CK$ hoc est $ML \sqsubset LK$: Q. E. D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectiùs incidentem lucem à reflectione magìs inspissari, seu spatio versus limitem Z arctiore constringi.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe (velut ad O) constituatur oculi centrum, quòd punctum A necessariò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente
Fig. 85. quoad radios ab infinitè dissito puncto manantes hypothesi) ab axis illi puncto adjacente parte radii cùm copiosiores, tum axi viciniores, oculóque rectiores, efficaciâ proinde præpollentes, nec non qui faciliùs re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis axem collocato itidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc, quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obscuritate fortassis nimia videbuntur. itaque jam opportunum autumo desistere.

LECT. IX.

I. Qualiter in obversum Speculi circularis convexum finitè distans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta constituto per ipsum radians & speculi centrum trajecta postremò connisi demonstrare; nunc idem quoad aspectum alias ubicunque situm aggredimur expiscari. quò primum attinet ut rectam investigemus, in qua consistet Imago; tum ut punctum ejus in ista recta præcisum determinemus. & primo quidem negotio satisfactum erit hujusmodi *Problema* conficiendo; quod (sequentium quoque gratiâ) generatim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente* (cujus centrum C) *datisque binis punctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum transeat.*

1. Si data puncta (puta A, X) sint ambo in circuli peripheria; manifestum est bisecto arcu A X in N, connexisque subtensis N A, N X, rectas N A, N X sibi mutuò reflexas fore; seu, junctâ C N, angulum C N X angulo C N A æquari. Fig. 86.

2. Etiam si datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, connexis A X, C X, factóque angulo C X H = C X A, fore X A, X H alterum alterius reflexum. Fig. 87.

3. Item si data puncta (A, X) æqualiter à centro distent; connexis rectis A C, X C, bisectóque angulo X C A à recta C N circulum reflectentem intersecante ad N; perspicuum est conjunctas rectas A N, X N, invicem in se reflecti; vel angulum C N X ipsi C N A æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo existant in recta per reflectentis centrum transeunte (nempe A B K C.)

1. Fiat C K . A C :: C B . T . ac inter C B, & T sit proportione media V (unde C Bq . V q :: C B . T :: C K . A C) . tum centro A, intervallo √ :: A C q — V q . describatur circulus reflectentem Fig. 89.

sec ans

ſecans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipſius AN reflexa erit.

Fig. 89. Nam ob ANq = ACq — Vq. erit Vq = ACq — ANq. adeóque CBq . ACq — ANq :: (CBq . Vq ::) CK . AC. quod, è præmonſtratis, reflectioni proprium eſt. ergò liquet propoſitum.

2. Ità quidem in hoc caſu; at ſi punctum A ponatur aliàs, ut ſit AC ⊐ AN; reliquis ſtantibus, Sumendum erit intervallum AN = √ : ACq + Vq; ut ſit ANq — ACq = Vq. ut poſthac conſtabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat 2 CK. CB :: CB . F. & 2 CA . CB :: CB . E. ſumatúrque CQ = E + F. & ducta QN ad AC, perpendicularis circulum ſecet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è ſuprà dictis liquidò conſectatur. At ſi fuerit AN ⊏ AC; tum accipi debet CQ = F — E; & (reliquis nihil immutatis, utì poſtmodùm apparebit) factum erit.

IV. Intra caſus hos *Problema*, ceu videtis, facilè conſtruitur; aſt illos; alióſque ſpeciales, ſi qui ſunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum eſt, & certè *δυσμήχανον*; vix ut aliud à *Geometris* hactenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicaríque poterit ſibi peculiarem, hoc vel adſimili modo deſcribendam.

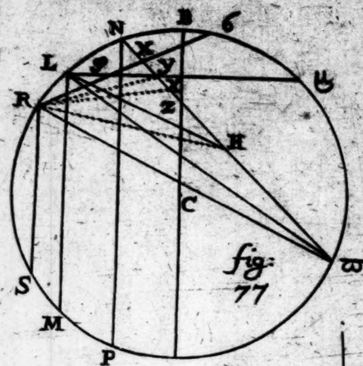
Connexâ CA, ſuper diametrum CA deſcribatur circulus AIC; item ſemidiametro CA deſcribatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC ſecantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG ſecent punctis H; demum per H, & X rectæ ducantur ipſas CI decuſſantes punctis N. per hujuſmodi

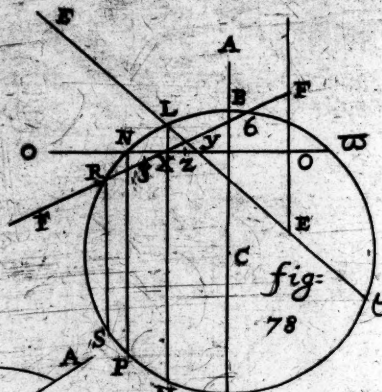
Fig. 90. puncta quævis deſignabilia tranſibit linea, *Problematis* expoſiti ſolutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis interſectio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine ſubinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantùm erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus eſt, erit recta AH biſecta in I. adeóque triangula ANI, HNI ſibimet æqualia prorſus & æquiangala erunt; & ſpeciatim ang. INA = ang. INX. unde patet propoſitum.

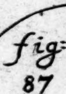
V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujuſmodi conſtructiones, etſi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magìs in propatulo collocantes à *Geometris*

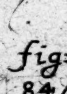
nihilo-

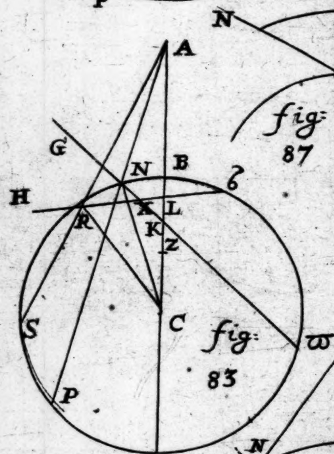
Fig.


N
B
6
X
y
L
R
z
H
C
S
M
P
ϖ
fig: 77

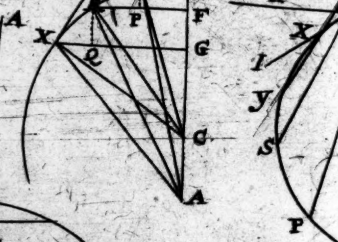

E
A
B
F
L
6
N
y
O
ϖ
R
X
z
T
C
E
S
P
M
fig: 78

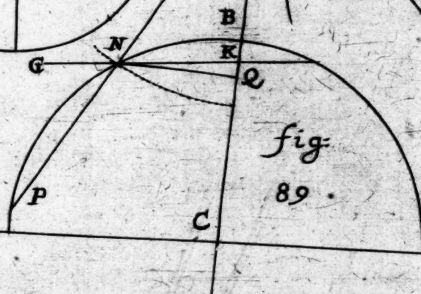

fig: 87

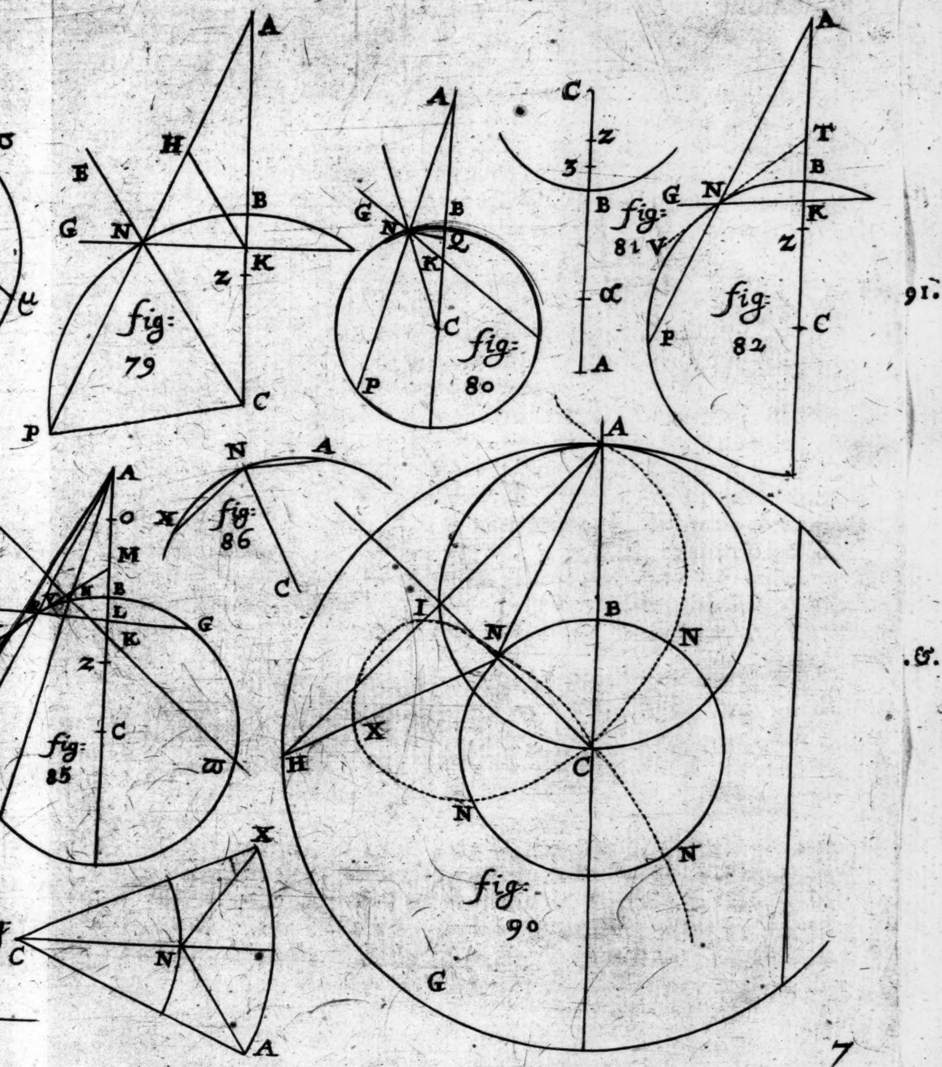

fig: 84


A
G
N
B
H
R
X
L
K
Z
S
C
ϖ
P
fig: 83

Fi


H
X
y
S
P
fig 88

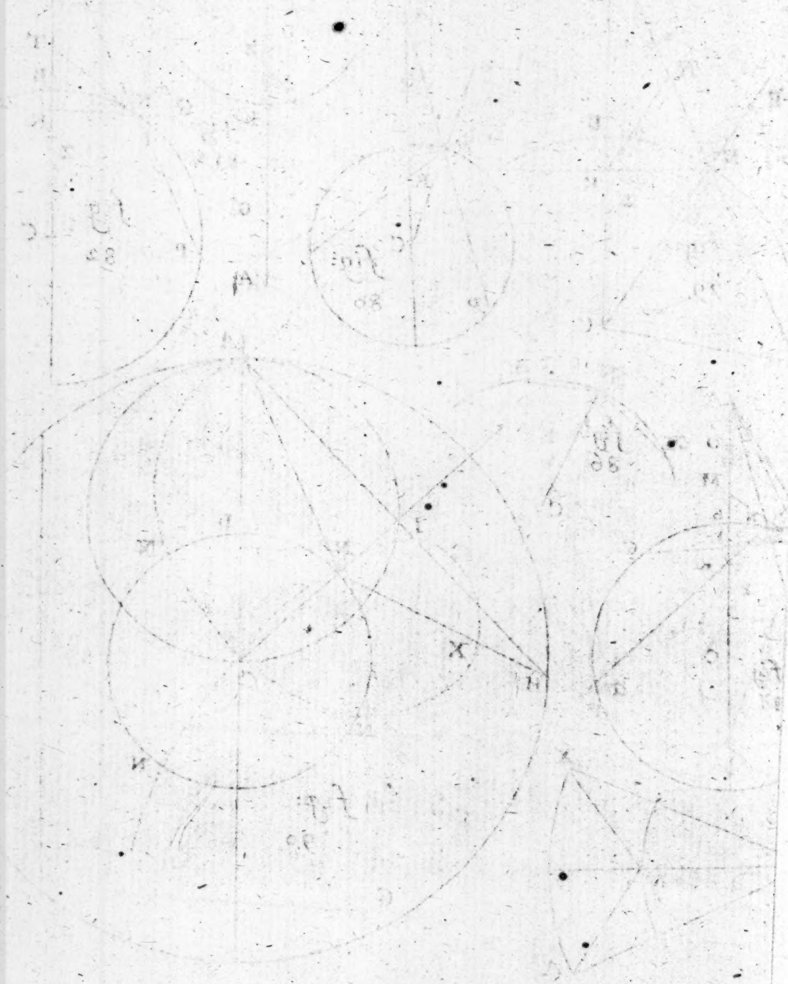

A
B
N
K
G
Q
P
C
fig: 89



91.

.&.

7



nihilominùs gravatim admittuntur; istâ tantummodò raptim insinuatâ, subnectemus aliam ab illorum gustu non abhorrentem; illam nempe (quando scilicet haud alia melior, ut varias pertentans analyses, & hoc in alia complura *Problemata* transformans existimari possum, facilè possit excogitari; quum & operæ meæ satis alioquin exercitatæ nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazenus Arabs* scriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate simul ac obscuritate; neque non ab incondita sermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorsum hoc præmittimus *Lemmaticum Problema.*

VI. Trianguli D P N angulus ad P rectus sit; & in hujus uno crure P N adsignetur punctum F; per F recta ducenda est, quæ reliquum latus D P (protractum nempe) ac hypotenusam D N ità secet, ut ab illis intercepta ad segmentum hypotenusæ lateri primò conterminum datam obtineat proportionem R ad S. Fig. 91.

Hoc ità peragatur licet. Ducatur F H ad P D parallela. & Diametro H N describatur Circulus H F N (is nempe per F transibit, ob angulum H F N rectum) tum connectatur D F; & fiat angulus F H I = ang. F D N. sit etiam R. S :: D F. T. & à puncto I ducatur recta I L K diametrum H N intersecans ad L, & circulo occurrens in K, ità quidem ut sit intercepta L K = T (hoc autem quomodò præstetur in superioribus ostensum) denuò per puncta K F trajiciatur recta C F, ipsam D P secans in X. Dico factum, vel ipse C X. C N :: R. S. connectatur enim recta N K. & quoniam ang. F K I (vel F H I) = F D N, erit triangulum F D C simile triangulo L K C; ac indè F D. D C :: K L. C K. item ob ang. F K N = ang. F H N = ang. X D C; erunt triangula X D C, N K C sibi quoque similia, proindéque D C. C X :: C K. C N. quapropter erit ex æquali F D. C X :: K L. C N. vel permutando F D. C K :: C X. C N; hoc est F D. T (vel R. S) :: C X. C N; quod faciendum erat. *Constr.* &c.

Advertendum est autem, quod datum punctum F in recta P N indefinitè protensa variè statui potest; vel nimirum inter puncta P, N; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in istorum casuum singulo quoque recta I K (conditione gaudens præstitutâ) plurifariàm duci potest; ut antehac inculcatum; unde plures emergent solutiones. at quoad omnes casus persimilis erit constructio, nec ferè diversa demonstratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus

centrum C) datáque ſint duo puncta A, X; reperiendum eſt in circumferentia punctum aliquod; à quo ductæ ad A, X rectæ, altera ſit alterius reflexa. || Hoc ità perficimus:

Fig. 92, 93. Conjungantur rectæ A C, X C; & fiat (ſeorſim) ang. δ = $\frac{1}{2}$ ang. A C X. & in ξδ crure anguli δ ſumpto liberè puncto ϖ ducatur ϖV ad ξδ perpendicularis alterum crus ſecans in V; & in Vϖ protracta capiatur ϖγ = ϖV; tum dividatur γV in φ, ut ſit γφ . φV :: XC . CA; perque punctum φ trajiciatur κξ ſic ut ſit κξ . κν :: CX . CN. denique fiat angulus X C N æqualis angulo ξκν; erit punctum N quale deſideramus. Nam ducantur X N, ξν; & fiat ang. C N G = ang. κνγ. adſumatúrque P G = P N; & connectatur X G. liquet jam trangula X C N, ξκν ſimilia fore; nec non ipſa C N F, κνφ; & ipſa X P F, ξϖφ; ipſáque demùm X F N, ξφν aſſimilari. quare P F . X F :: ϖφ . ξφ. & X F . F N :: ξφ . φV. & ex æquo P F . F N :: ϖφ . φV. & antecedentes duplando 2 P F . F N :: 2 ϖφ . φV. componendóque 2 P F + F N . F N :: 2 ϖφ + φV . φV. hoc eſt G F . F N :: γφ . φV (hoc eſt) :: X C . C A. ducatur jam N L ad X G parallela; quare eſt ang. L N G = ang. G = ang. X N G; & X G (X N) . N L :: G F . F N :: X C . C A. porrò fiat ang. L N H = ang. X C A; & H N protracta ipſi C A occurrat in M; eſtque propterea triangulum H N L ſimile triangulo H C M; idcircóque H C . C M :: H N . N L. ducatur denuò tangens N Q; eſtque tum ang. P N Q = rect — C N P = rect — κVϖ = ang. δ = $\frac{1}{2}$ X C A; vel 2 ang. P N Q = ang X C A = ang L N H. Verùm erat priùs 2 ang. X N F = ang. X N L. ergo 2 ang X N F — 2 ang P N Q = ang X N L — ang. L N H. hoc eſt 2 ang X N Q = ang. X N H. ergo tangens N Q biſecat angulum X N H; indéque conſectatur fore rectam H M ipſius X N reflexam; ac ideò eſſe X C . H C :: X N . H N. atqui fuit priùs H C . C M :: H N . N L quare jam erit ex æquo X C . C M :: X N . N L (hoc eſt etiam è præmonſtratis) :: X C . C A. unde C M = C A. quapropter H M, ipſius X N reflexa tranſit per A: Quod propoſitum erat efficere. ||

Lem. præced.

VIII. Hujuſce *Problematis* ità generaliùs propoſiti varii quidem caſus ſunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque poſitum eſt intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quinetiam in horum caſuum unoquoque pluries conficitur negotium) aſt ubique non abſimilis erit constructio; ſanè nimius eſſem; meámque pariter ac veſtram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; ſuffecerit ejuſce ſpecimen aliquod protuliſſe.

IX Adnota-

IX Adnotabimus tantùm quòd ex *Problematis* hujuſce natura conſtructioneque propoſita ſatìs attendenti conſtabit (utique ſicut in *Hypotheſibus* antehac tractatis uberiùs eſt declaratum) duorum tantùm ad eaſdem axis partes incidentium reflexos ad unum ſeſe punctum decuſſare. nam aliorum unius (qui ſubinde poteſt dari) vel alterius reflexi per ejuſmodi punctum tranſeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus eluceſcit datis puncti radiantis, oculiſque poſitione deſignari poteſt linea quævis, in qua dicti puncti ſpecies apparebit; incumbit proximè punctum in ea præciſum determinare, ad quo eadem conſiſtit. eo ſpectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii AN, AR in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum NR (qui incidentiæ punctis interjacent) intercipiant arcum PS; eorum verò reflexi intercipiant arcum $\pi\sigma$; erit arcus $\pi\sigma$ æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcûs NR, & arcûs PS. Nam (1) in prima figura; eſt $PS + SR + RN = PN = N\pi = \pi\sigma + \sigma R - RN$; ergò, pares hinc indè SR, & σR ſubducendo, erit $PS + RN = \pi\sigma - RN$. proindéque $PS + 2RN = \pi\sigma$. (2). in altera figura; erit $PS + SR - RN = PN = N\pi = RN + R\sigma - \sigma\pi$. quarè rurſus æquales auferendo SR, $R\sigma$ manebit $PS - RN = RN - \sigma\pi$ unde tranſponendo erit $\sigma\pi = 2RN - PS$. Fig. 95, 96.

XI. Etiam hoc *Lemmation* adſcribemus: Biſecetur recta NP in E; & ubivis ſumatur punctum A; erit $EA = \frac{PA \pm : NA.}{2.}$ Nam Fig. 94.

$$EA = \frac{PN}{2} \pm : AN = \frac{PN \pm : 2AN}{2} = \frac{PA \pm : AN.}{2}$$

XII. Exhinc, ut propoſitum citiùs attingamus, Suppoſito radios AN, AR (quoad caſum præſentem) ſibi quàm proximos incidere, punctum deſignabimus ad quod ipſorum reflexi $N\pi$, $R\sigma$ concurrunt; dicimus utique ſi dicti reflexi concurrant ad Z; biſectis ſubtenſis NP, $N\pi$ in E, & F; fore FZ . ZN :: EA . NA. || Nam quoniam arcus NR, PS ex hypotheſi ſunt indefinitè parvi (ſeu minimi) ſe habebunt ut ſuæ ſubtenſæ; nec non idem de arcubus NR, $\pi\sigma$ dici poteſt. igitur arc. PS . RN :: PS . RN :: PA . RA. (hoc eſt ob RA, NA nihil, ex eadem hypotheſi, differentes) :: PA . NA. ergò, bis componendo, erit PS + 2RN . RN :: PA + 2NA . NA. Fig. 95, 96.

hoc est $\sigma\varpi . RN :: PA + 2NA . NA$. est autem arc $\sigma\varpi . RN$ :: subtensa $\sigma\varpi . RN :: \varpi Z . ZR :: \varpi Z . ZN$. ergo $\varpi Z . ZN :: PA + 2NA . NA$. & componendo $\varpi N . ZN :: PA + 3NA . NA$ & antecedentes subduplando $FN . ZN :: \frac{PA + 3NA}{2} . NA$. denique dividendo $FZ . ZN :: \frac{PA + NA}{2} . NA$. est autem $EA = \frac{PA + NA}{2}$. ergò tandem est $FZ . ZN :: EA . NA$: Q.E.D.

XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo GNϖ constituti, Fig. 95, 96. tanquam ad O. etenim superiùs nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legisve ratum, fixúmque censeri queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum intersecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ; concisâ tamen, & facili, talique quæ conclusionis adsertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihimet accerserem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exhaurirem. suffecerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modò tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hactenus; ad concava proximè nos conferemus, aliquanto breviùs exponenda.||

Lect.

LECT. X.

I. IN postrema Lectione quod spectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magìs ἐν πέπῳ, contemplabimur. & quidem casuum præcipuorum diversitatem imprimìs distinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta A C protendatur indefinitè; quo posito.

II. 1. Incidat radius A N; & sit $AN = AC$, erit ipsius A N reflexus, puta N α, ad A C parallelus. Fig. 97.

Hoc è supra generatim ostensis constat; & facilè jam patet, connexâ C A. etenim est ang. $ACN = ANC$, ob A C, A N, ex Hypothesi pares; & ang. $ANC = \alpha NC$, propter reflectionem, adeóque ang. $ACN = \alpha NC$; unde sunt A C, N α sibi parallelæ.

III. Incidat radius A M major ipsâ A C; ejus reflexus (puta M α) cum A C directè procedens conveniet ultra centrum, respectu puncti A; (hoc est centrum C puncto radianti, concursuique interjacebit). Fig. 98.

Nam ob $AM \sqsubset AC$, erit ang. $ACM \sqsubset AMC = CM\alpha$. ergo ang. $BCM + CM\alpha \sqsupset$ ang. $BCM + ACM = 2$ rect. quare M α, C B convenient infra C M ad partes α B; velut ad K.

IV. Incidat radius A R; & sit A R minor ipsâ A C; ejus reflexus, puta R α, retro protractus occurret; (hoc est ut radians centrum, concursuique sit interjectum). Fig. 99.

Nam hîc ob $AR \sqsupset AC$, erit ang. $ACR \sqsupset$ ang. $ARC =$ ang. αRC. quapropter ang. $DCR + \alpha RC \sqsubset 2$ rect. unde patet ipsas D C, α R protractas infra C R concurrere.

V. Horum

V. Horum casuum primus ad unum duntaxat ab una axis parte radium pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius disterminat. de posteribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus; Sit jam itaque primò $AC = AG = A\gamma$; unde quilibet incidens cavo $GB\gamma$ radius (ut AN) major erit quam AC; hujus itaque reflexus axem secet puncto K; dico, si semidiameter CB dividatur in Z; ut sit $CZ . ZB :: AC . AB$; fore $CK \sqsubset CZ$. etenim ob angulum ANK bisectum, erit $AC . CK :: AN . NK$. vel permutando $AC . AN :: CK . NK$. est autem $AC . AB \sqsupset AC . AN$ ergo $AC . AB \sqsupset CK . NK \sqsupset CK . BK$. ergò cùm sit, ex hypothesi, $CZ . ZB :: AC . AB$; erit $CZ . ZB \sqsupset CK . BK$. componendóque $CB . ZB . \sqsupset CB . KB$. unde $ZB \sqsubset KB$, seu $CZ \sqsupset CK$: Q. E. D.

Fig. 101. Fig. 100.

VI. Hinc punctum Z est limes infra quem, Versus centrum, nullus reflexus axem intersecat.

Coroll. Hinc si puncta Z, ζ sint limites punctorum A, α (quorum A remotius) erit $CZ \sqsubset C\zeta$.

Nam $BC . AC \sqsupset BC . \alpha C$. componendóque $AB . AC \sqsupset \alpha B . \alpha C$. hoc est $ZB . ZC \sqsupset \zeta B . \zeta C$. vel compositè $CB . ZC \sqsupset CB . \zeta C$. ergò $ZC \sqsubset \zeta C$.

VII. Quinetiam erit in hoc casu; $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$. Nam ducatur KH ad CN parallela, protractæ AN occurrens in H; & connectatur CP; & eodem planè modo quo superiùs (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore $AN \times NP . CNq :: AK . CK$. unde divisim erit $AN \times NP - CNq . CNq :: AC . CK$. est autem $AN \times NP = ANq - AN \times AP = ANq - : ACq - CNq = ANq - ACq + CNq$; adeóque $AN \times NP - CNq = ANq - ACq$. ergò demum erit $ANq - ACq . CNq :: AC . CK$: Q. E. D.

Notetur; si fuerit AC minor semisse semidiametri circuli reflectentis, quòd punctum A duos focos habebit ad easdem centri partes, quorum alter ad partes D, alter ad B pertinebit; sin AC major fuerit istâ Semisse, focis qui ad diversos vertices B, & D pertinent, centrum C interjacebit.

VIII. Etiam hoc interseram *Theorema*, præmissis conforme: Si fiat $2\,\underline{CK} . \underline{CN} :: \underline{CN} . F$; itémque $2\,\underline{CA} . CN :: CN . E$; &

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit $CQ = F - E$. Nam (ut suprà) est $CA . CK :: F . E$. quare dividendo erit $CA - CK . CK :: F - E . E$. Item hìc erit $ANq - ACq = 2AC \times CQ + CNq$. adeóque $2AC \times CQ + CNq . CNq :: AC . CK$. hoc est, (ob $CNq = 2AC \times E$.) $2AC \times CQ + 2AC \times E . 2AC \times E :: AC . CK$. hoc est $CQ + E . E :: AC . CK$. quare dividendo $CQ . E :: AC - CK . CK$. ergò $F - E = CQ$: Q. E. D.

IX. Porrò, si duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secent punctis K, L; erit $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$. Nam ob $CK . AC :: CNq . ANq - ACq$. & $AC . CL :: ARq - ACq . CNq$. erit ex æquo perturbatè $CK . CL :: ARq - ACq . ANq - ACq$.

X. Hinc si radius AR sit ipso AN obliquior, erit $CK \sqsupset CL$. Nam $ARq - ACq \sqsupset ANq - ACq$.

XI. Hinc palàm est reflexos NK, RL sese priùs quàm axem decussare.

XII. Accipiantur porrò bini pares arcus NR, RX; & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium LM, obliquiorum occursibus interjectum, majus esse spatio LK, quod rectiorum continetur occursibus. Nam è suprà monstratis constat esse $ANq + AXq \sqsupset 2ARq$. proindeque fore $ANq + AXq - 2ACq \sqsupset 2ARq - 2ACq$. ac indè $ANq - ACq . ARq - ACq \sqsupset ARq - ACq . AXq - ACq$. hoc est $CL . CK \sqsupset CM . CL$. vel $CM . CL \sqsubset CL . CK$. quare $CM + CK \sqsubset 2CL$. & ideò $LM \sqsubset KL$. Fig. 102.

XIII. Hinc rectiùs ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidni demùm rursus ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo uspiam in AZ constituto, apparere?

XV. Advertatur saltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo uspiam in ZB collocato confusionem apparentiam objici; quippe cum

cùm eum tunc reflexi convergentes appellant; & imago distinctior Z post oculum consistat. quin ejusmodi complures apparentias observabitis ipsi si lubet, & ex his deducetis ||

XVI. Prætereà, *dato oculi centro, velut O, quomodo designandus sit ipsum pervadens reflexus* (ceu N ϖ) è suprà tractatis aliquatenus adparet. nec inibi generaliùs expositum *Problema* libet hic reponere.

Fig. 103.

XVII. Quinetiam antedicta recensendo constabit, si bisecentur subtensa PN in E; & subtensa N ϖ in F; ac fiat FZ.ZN :: EA.NA; radiantis imaginem, visûs O respectu, circa punctum Z consistere. planè similis est discursus, quorsum κοκκύζειν. ||

XVIII. Superest tantùm, ut de posteriore quem innuebamus casu paucula subdamus. Eò, ponatur AC = AG = Aγ; indè quilibet incidens cavo GBγ radius ipsâ AC minor erit; sit talis alicujus AN reflexus N ϖ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hic præcedentibus conformia deprehendentur, & suppari demonstrabuntur modo; qualia sunt nempe

XIX. AC.AN :: CK.KN.

XX. ACq — ANq.CNq :: AC.CK.

XXI. Radii AR ipso AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit CK.CL :: ACq — ARq.ACq — ANq. ac indè

XXII. CK ⊐ CL.

XXIII. Incidentium rectiorum (pares, ut superiùs, arcus in reflectente sumendo) reflexi concursus habent à se minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos casus præmonstratis conformia, vel agnata persimili quoque quoad hunc casum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; sed enim id quod ubique præcipuum etiam hîc exertiùs ostendam; præmisso tamen hoc, ad sequentia quoque concidenda non inutili, *Lemmatio:*

XXIV. Detur recta BC; in ea protracta designandum est punctum, velut Z, ita ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. || Id facilè sic exequimur. ||

Fig. 104.

1. Si

1. Si fuerit I ⊏ R; fiat I — R . R :: BC . CZ; quare componendo erit I . R :: BZ . CZ. ergò factum. Fig. 105.

2. Sin I ⊐ R; fiat R — I . I :: BC . BZ. ergò rursus componendo R . I :: CZ . BZ. vel inversè, I . R :: BZ . CZ.

XXV. Fiat jam CA . AB :: CZ . BZ; Dico punctum Z esse metam, citra quam (respectu centri C) nullus reflexus axem decussabit; hoc est præmissis insistendo, fore CK ⊏ CZ.

Nam ducatur NT circulum contingens ad N. erit ergo NK . NA :: KT . AT ⊐ BK . AB. quare NK . NA + AB . BZ ⊐ BK . AB + AB . BZ = BK . BZ. est verò NK . NA :: CK . CA. & AB . BZ :: CA . CZ. ergò CK . CA + CA . CZ ⊐ BK . BZ. hoc est CK . CZ ⊐ BK . BZ. vel permutando CK . BK ⊐ CZ . BZ. unde dividendo CB . BK ⊐ CB . BZ. adeóque BK ⊏ BZ. unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consectatur ejusmodi punctum Z esse locum ipsissimum imaginis punctum A exhibentis oculo, puta O, in axe CA constituto; patétque quàm longè passim ab Opticis; nominatim à novissimis *Stevino*, *Hobbio*, *Fabrioq;* in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta Q) tanto semotum à vertice B intervallo, quanto radians A ab ipso B distat. id quod præterquam quòd nullâ verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur; cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto Q proveniens) experientiâ facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum A accensa candela speculo cavo GBγ exponatur, oculo velut ad O sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso BQ, quod ipsam AB exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantiâ, sed admodum majori videbitur elongari; tantâ circiter ad sensum, probabilémque conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circà discursus noster experientiæ suffragio constabilitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis respectu visûs extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo; bisecando scilicet ipsas NP, Nφ punctis E, F; faciendóque EA . AN :: FZ . ZN. Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere; sed in obliquioribus intra illum, nempe si fuerit AE ⊏ AN punctum Z ultra axem Fig. 106.

CB existet; sin AE ⊐ AN, punctum Z versus ☛ existet; sin AE = AN; concursus infinitè distabit; seu proximus reflexus ipsi N ☛ parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si AE = AN; erit $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$. Nam $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN$

Fig. 106. $= 3ANq$; itaque punctum N, istos casus disterminans, facilè designatur.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satìs, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermissam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consectari. quin & hinc generatim verum apparebit satìs: Si fuerit Z ipsius A imago, tantùm unus idcircò ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpiùs in decursu inculcata satìs arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam indè duo per Z transibunt, contra hypothesin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexi; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt, & quædam in abstractione summa non ità facilè vèl explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadantenus promovisse, haud disparia (certè magìs nova, minimèque protrita) circa refractiones sphæricas, seu circulares, attentabo.

LECT. XI.

I. *Catoptricâ circulari defuncti ad Dioptricam promovemur*; quorsum incidentium quotcunque refractis unâ simulo perâ delineandis, adeóque refractionum symptomatis organicè pertentandis modum imprimis exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorsim ad vγ æqualem diametro (NG) circuli refringentis describatur circulus v π γ. item habeat vγ ad Sγ rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, constanter nuncupabo rationem I ad R) & super diametro Sγ describatur quoque circulus SHγ. Incidat jam radius quilibet MNP, cui conveniens designandus est refractus. ut hoc assequamur, circulo adposito à V adaptetur v π = NP; & centro γ per π descriptus circulus secet circulum SHγ in H; connexáque γH circulum v π γ intersecet in ξ. demùm connexâ vξ, circulo NPG accommodetur NX = vξ; erit NX ipsius NP refractus. Etenim (ductis GP, GX) est γH. γξ :: (γSγv ::) I.R. hoc est γπ. γξ :: I.R. hoc est GP. GX :: I.R. cùm itaque sint ipsæ GP, GX recti sinus angulorum GNπ, GNX (quorum GNP est angulus incidentiæ) liquet propositum. Fig. 107. 108.

II. Ad ipsa *Symptomata* progrediamur exponenda radiis ad circulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quasi distantiam posito, seu parallelos ad sensum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctúmque de longinquo radians protendatur recta ACZ; tum fiat BZ. CZ :: I.R; nec non dividatur CZ in F, ut sit FZ. FC :: I.R; & centro F per Z describatur circulus EGZ. his peractis, accipiatur jam quilibet ad AC parallelus MNP (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico si recta NC (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo EGZ protracta occurrat in G; & Fig. 109.

in axe capiatur CK = CG; connectatúrque recta NK, fore NK ipsius MNP refractum. Connectantur enim rectæ FG, BG; & quoniam est BZ.CZ :: (I.R ::) FZ.FC; erit permutando
Fig. 109. BZ.FZ :: CZ.FC. dividendóque BF.FZ :: FZ.FC. itaque patet triangula BFG, GFC (latera scilicet habentia circa communem angulum GFC proportionalia) similia fore. quamobrem erit BG.GF :: GC.CF. seu permutatim BG.GC :: GF.CF. hoc est BG.GC :: FZ.CF :: I.R. verùm in triangulis BCG, NCK est BC = CN, & CG = CK; & ang. BCG = NCK; adeóque BG.GC :: NK.CK. quare erit quoque NK.CK :: I.R. ergò, *secundum generatim antehac ostensa, liquet NK ipsius MN refractum existere.

* *Lect.* 3. *numero.* 10.

Coroll. Adnotetur esse triangula BFG, GFC similia; ac esse BG.GC :: I.R; & ang. BGF = GCF; & esse BF, FG, FC ∺ &c.

III. Ex hoc (sanè pulchro, perutilíque *Theoremate*) cùm particularis exoritur methodus hujusmodi quotcunque refractos expeditissimè seu delineandi, seu computandi; tum ipsorum præcipua *symptomata* facilimè discernuntur ac demonstrantur. qualia sunt, quæ in subjectis exhibentur *Corollariis*.

IV. Patet hinc punctum Z esse limitem ultra quem (respectu centri) nullus axem intersecat refractus; seu perpendicularis ipsius AB (vel ei saltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad Z termi-
Fig. 110. nari. quia nimirum est CZ ⊏ CG, vel CR.

V. Consequitur etiam, si duorum incidentium MN, QR (quorum QR sit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis K, L, fore
Fig. 111. CK ⊏ CL. Etenim si rectæ NC, RC ad circulum refractarium (ità circulum EGZ meritò subinde nominabimus) producantur, ut ipsum secent punctis G, H; liquet esse CG ⊏ CH; adeóque CK ⊏ CL. Hinc

VI. Ad easdem partes incidentium refracti sese priùs intersecant quàm axem; (veluti puta refracti NK, RL sese decussant in X.)

Fig. 111. VII. Quinetiam, si in primo casu per centrum C ducatur recta VI ad BZ perpendicularis, dictóque circulo refractario occurrens ad I; & fiat CY = CI, patet punctum Y esse limitem refractionis cite-

Fig.

* Lect.
mero.

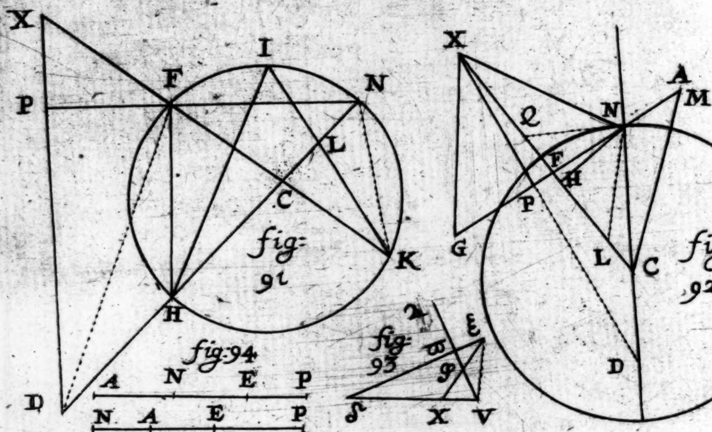
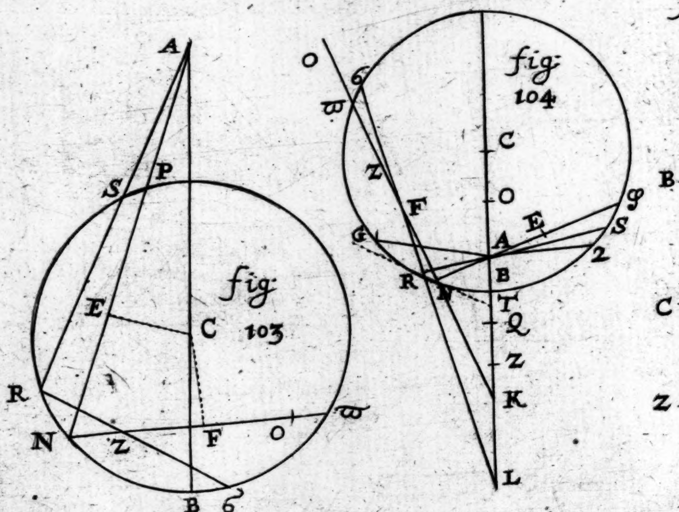


Fig. 1

Fig. 1

Fig. 1



112.

num.7.

35

fig: 92

fig: 95

fig: 96

fig: 97

fig: 98

fig: 99

fig: 100

fig: 101

fig: 102

fig: 105

fig: 106

fig: 107

fig: 108

fig: 109

1 Cas

fig: 110

citeriorem ; erit enim connexa V Y refractus obliquissimi radii, ceu T V, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta C V I circulum E G Z tangat in I, & adsumatur C Y = C I, erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa V Y refractus erit incidentis (puta V T) ad B C paralleli; qui certè cunctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (*è præmissis) connexâ F I, sit F I . C F : : I . R . hoc est sinus rectus anguli F C I (vel anguli C V T) ad sinum totum, ut I ad R; nullus ipso T V obliquior medium B N V penetrabit; at ipse quicunque talis repercutietur; velut φ ψ in φ ξ. Fig. 112. *Lect. 3. num. 7.

IX. Cæterùm hìc (tametsi præter ordinem non nihil, extráque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interseremus: Omnium à puncto B promanantium, & a circuli E G Z cavis partibus refractionem patentium (juxta casus prænominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius B G, & (stantibus quæ præstructa præmonstratáque sunt) triangula B G F, G C F similia sunt; angulúsque B G F par angulo G C F; itémque F G . C F : : I . R; est autem F G ad C F, *ut Sinus anguli* G C F *hoc est anguli B G F) ad Sinum anguli C G F . ergò Sinus anguli* B G F *(qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli* C G F se habet, ut I ad R . ergò C G C est refractus ipsius B G : Q. E. D. Fig. 113, 114.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R; etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in *Dioptrica* desideratum, perquam utile; Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate *Corollarii* loco (licèt ad aliam pertinens hypothesin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iisque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ C B, E Z, C E, C Z, C F easdem in uno, quas in altero quovis proportiones observant; id quod facilimè demonstratur; & satis elucescit

cescit ex eo, quod earum omnium ad se proportiones in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro sequentibus hæc adjungo *Lemmatia*.

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) se deinceps æqualiter excedentia; sint etiam altera totidem M, N, O; & sit A . B :: M N; ac B, C :: N, O; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Arithmetica*. Nam ob A . B :: M . N . erit divisim $A - B . B :: M - N . N$. item ob B . C :: N . O . erit per rationis conversionem $B . B - C :: N . N - O$. ergò erit ex æquo $A - B . B - C :: M - N . N - O$. itaque cùm sit ex Hypothesi $A - B = B - C$; erit etiam $M - N = N - O$: Q. E. D.

XII. 2. In circuli quadrante ZQ trium arcuum ZG, ZH, ZI Sinus recti $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$ æqualiter crescant (ut nempe sit $\alpha\beta = \beta\gamma$)
Fig. 115. dico fore $G\alpha - H\beta \sqsupset H\beta - I\gamma$.

Nam ducatur subtensa GI ipsam $H\beta$ secans, in X; & sint XR, IS ad FQ parallelæ; patet ipsas GR, XS æquari hoc est fore $G\alpha - X\beta = X\beta - I\gamma$; unde liquidum est esse $G\alpha - H\beta \sqsupset H\beta - I\gamma$: Q. E. D.

XIII. 3. Sunto concentrici bini circulorum quadrantes FZX, $F\zeta\xi$; & ad FZ parallela ducatur recta quævis $LG\gamma$; circulos inter-
Fig. 116. secans punctis G, γ; dico fore $FZ - LG \sqsubset F\zeta - L\gamma$.

Nam connexa FG circulum $\zeta\gamma\xi$ producta secet in T; connectantúrque subtensæ ZG, ζT (hæc ipsam $L\gamma$ secans in S) Patétque jam rectas ZG, ζT parallelas esse; adeóque quadrangulum $ZGS\zeta$ fore parallelogrammum; unde $GS = Z\zeta$; adeóque $F\zeta - LS = FZ - LG$. ergo $F\zeta - L\gamma \sqsupset FZ - LG$: Q. E. D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli MN, QR, VX, à se distantes æqualiter (hoc est ut ductis Nv, $R\rho$, $X\xi$ ad axem AC perpendicularibus sit $X\xi - R\rho = R\rho - Nv$) & ipsorum refracti cum axe
Fig. 117. conveniant punctis K, L, O; erit obliquiorum concursibus interjectum spatium OL majus spatio LK, quod à rectiorum occursibus continetur.

Nam ducantur NC, RC, XC circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$; & quoniam triangula $CX\xi$, $CF\gamma$ similia sunt; erit $X\xi . CX :: F\gamma . CF$. item simili de causa, est CR (CX).

$R\rho$

$R\varrho :: CF . F\zeta$; quapropter erit ex æquo $X\xi . R\varrho :: F\gamma . F\zeta$. non dispare ratione constabit esse $R\rho . N\nu :: F\zeta . F\alpha$. ergò cùm tres $X\xi$, $R\varrho$, $N\nu$ se æqualiter excedant; *etiam tres $F\gamma$, $F\zeta$, $F\alpha$ se æqualiter excedent; *21 hujus Lect. Hyp. unde consequetur esse $C\alpha - C\zeta \sqsupset C\zeta - C\gamma$; nec non esse *$\alpha G - \zeta H \sqsupset \zeta H - \gamma I$; *22 huius Lect adeóque conjunctim $CG - CH \sqsupset CH - CI$; hoc est $CK - CL \sqsupset CL - CO$; hoc est denuò $LK \sqsupset OL$: Q.E.D.

XV. Hinc apparet rectiùs illapsam refringenti lucem magìs inspissari, versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focúmque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consectatur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò faciliùs ab ipso readunari, seu propiùs recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cùm præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt; quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpiùs admonitum: — ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν αὖτις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν. cæterùm hâc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

Lect.

LECT. XII.

I. *Parallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixus, præter alia præcipua symptomata, locum ultimè determinavi, quam isti repræsentant, imaginis, oculo in axe constituto*. res jam postulat ut eandem definiamus oculi gratiâ secùs collocati. veruntamen unam priùs haud inutilem adnectam observationem, ad præcedentia spectantem; hanc utique:

Fig. 118, 119. II. Si duo Segmenta N B R, ν ϐ ρ latitudines (vel subtensas) N R, ν ρ æquales habeant; quorum ν ϐ ρ ad majorem pertineat circulum; hoc cùm potentiùs aduret, tum objectum visibile clariùs atque distinctiùs exhibebit. Sint enim C, κ circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii sint E G Z, ε γ ζ; horúmque centra F; φ; tum parallelorum punctis N, ν incidentium sint refracti N D, ν δ; dico tum fore D Z ⊏ δ ζ. || Ducantur enim rectæ N C G, ν κ γ; hísque perpendiculares rectæ F L, φ λ. éstque C N . ν ϖ :: C N . N P :: C F . F L. & ν ϖ . κ ν :: φ λ . κ φ. ergò (rationes sibi pares adjungendo) est C N . ν ϖ + ν ϖ . κ ν :: C F . F L + φ λ . κ φ. hoc est C N . κ ν :: C F × φ λ . F L × κ φ. est autem C N . κ ν :: C F . κ φ :: C F × φ λ . κ φ × φ λ. quapropter erit C F × φ λ . F L × κ φ :: C F × φ λ . κ φ × φ λ; & idcircò F L × κ φ = κ φ × φ λ; indeque F L = φ λ. hinc consequetur fore C F — C L ⊏ κ φ — κ λ; nec non F Z — L G ⊏ φ ζ — λ γ; proindéque conjunctim C Z — C G ⊏ κ ζ — κ γ; hoc est C Z — C D ⊏ κ ζ — κ δ; hoc est demum D Z ⊏ δ ζ; exhinc lux ab arcu ν ϐ ρ magìs constipata, (in spatium quippe restrictius δ ζ coacta) violentiùs operabitur; & à fonte magìs ad punctum accedente promanare visa punctum radians distinctiùs exhibebit; id quod institutum fuit ostendere; quo rei passim observatæ, nec exilis in perspiciliorum constructione usûs ratio constaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi respectu quomodocunque siti; quem in finem conficiendum venit imprimìs hujusmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iste versatur:

23. 11 *Lect.*

III. Dato

III. Dato circulo refringente; punctóque quovis X; per punctum X ducatur recta, quæ sit incidentis ad datam positione rectam CB parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe CB; facillimè perficitur negotium; etenim si fiat R.I::CX.T; & centro X intervallo ipsam T adæquante describatur circulus refringentem intersecans in N; è præmissis admodum patet connexum NK per N incidentis ad BC paralleli refractum esse; quia scilicet est CX.XN::CX.T:: R.I. Fig. 120.

IV. Verùm extra casum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema* Solidum est, aut plusquam Solidum (ut ex analysi non difficilè perspiciatur) & certè viâ consuetâ, per lineas vulgò receptas, constructu perquam arduum & operosum; ità quidem ut licèt mihi non penitus incomperta sit methodus ejusmodi constructionem non unam moliendi, ægrè possim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum exposcit; suffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam sibi peculiarem, punctatim facili negotio designabilem, ità construi possit, ut unà suam naturam ac indolem prodat. modus ille sic habet.

V. Connectatur recta CX; fiàtque CX.CV::R.I; & per punctum V indefinitè protendatur recta FG, datæ CB parallela; tum è refringentis centro C rectæ quotcunque CI exeant, rectam FG decussantes punctis H; & centro X, intervallo rectas VH perpetuùm æquantè descripti circuli rectis CI occurrant punctis N; per hujusmodi puncta quævis linea transit, quam innuimus expositi *Problematis* Solutioni deserrituram; ejus scilicet, & dati circuli refringentis intersectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipsi BC parallelam; seu vicissim hæc in illam. Sit enim talis intersectio quævis N; & ducta NX ipsam BC secet in K; & sint NM, ac XT ad BC parallelæ. Estque tum CK.KN:: (TX.XN::TX.VH::CX.CV::) R.I; unde secundum ostensa liquet NXK refractum esse ipsius MN; quod oportebat factum. Ità *Problema* διωρισμὸν utcunque licebit exequi, nec non ejusce qualitatem intueri; quot refracti per oculi centrum meent definire, singulósque reipsâ designare; quæ longiusculum esset sigillatim exponere, cùm autem eâtenus imaginis locus Fig. 121.

habeatur determinatus; succedit ut breviter etiam ipsissimum in singulo tali refracto punctum ostendamus, ad quod illa consistit. in cujus rei gratiam hoc quasi *Lemma* præsternemus.

VI. In circulo ANB, cujus centrum C, sint Semidiametro CA perpendiculares NE, RF; item Semidiametro CB sint perpendiculares NG, XH; sint autem CE, EF ipsis CG, GH proportionales; & arcus NR, NX indefinitè parvi; seu quasi minimi dictâ conditione præditi; dicimus arcum NR ad arcum NX rationem habere conflatam è rationibus ipsarum CE ad CG, & NG ad NE; vel esse arc. NR, NX :: CE × NG. CG × NE. Nam per N ducatur VT tangens circulum, ipsisque FR, HX occurrens punctis T, V. est itaque (propter Summam ex Hypothesi parvitatem dictorum arcuum) arc NR. CN :: NT. CN :: EF. EN. item CN. arc NX :: CN. NV :: NG. GH. quapropter erit arc NR. CN + CN. arc NX = (EF. EN + NG. GH = EF. GH + NG. EN =) CE. CG + NG. EN. hoc est arc NR. arc NX = CE. CG + NG. EN: Q. E. D. (vel arc NR. NX = CE × NG. CG × EN.)

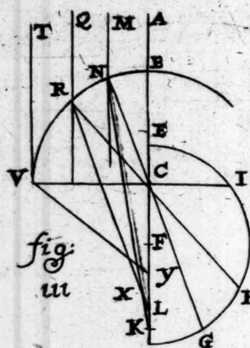
Fig. 122.

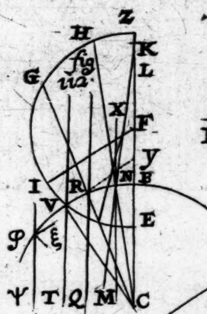
VII. Sit jam radii cujusvis talis MNP, refringentem intersecantis punctis N, P, refractus Nϖ (refringentem nempe denuò secans in ϖ) huic autem indefinitè vicinus (& quasi proximus) adjaceat radius QRS, cujus itidem refractus Rσ (refringenti nempe rursus occurrens in σ), priorem Nϖ decussans in Z, bisecentur autem subtensæ NP, Nϖ punctis G, E: Dico rationem NZ ad GZ componi è rationibus NG ad NE, & CE ad CG.

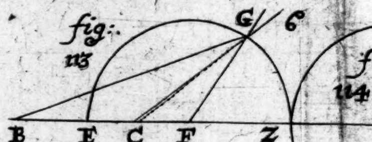
Fig. 123, 124.

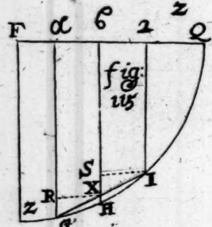
Nam ducantur rectæ CE (hæc ipsam RS quoque secans in F) & CG; nec non CI ad Rσ perpendicularis; & in protracta CG sumatur CH = CI; & per H ducatur XY ad Nϖ parallela, seu perpendicularis ad CH; unde est XY = Rϖ; & arc NX = Yϖ; & arc XY = arc Rσ; adeóque arc NR $\pm$: $\sigma\varpi$ = 2 arc NX. Estque præterea CG. CE :: R. I :: CI. CF :: CH. CF; adeóque permutatim CG. CH :: CE. CF. ergò (juxta præcedentem) est arc. NR. NX = NG. NE + CE. CG. ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum NR, SP, $\varpi\sigma$ exiquitatem, erit arc NR. $\varpi\sigma$ :: subtensa NR. $\varpi\sigma$ :: NZ. Zσ :: NZ. Zϖ. ergò (inversè componendo, vel dividendo, tum & consequentes subduplando) arc NR. $\frac{\text{arc NR} \pm : \varpi\sigma}{2}$ :: NZ. $\frac{NZ \pm : Z\varpi}{2}$. atqui velut modò dictum)

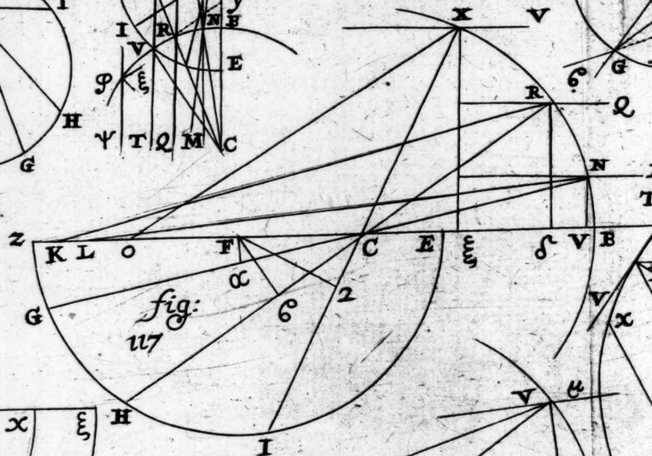
arc

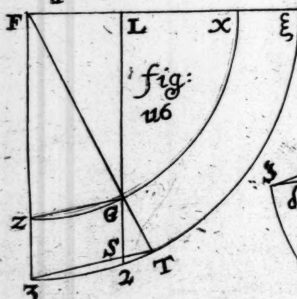

T Q M A
B N R
E C V I
F y X L K H G z
fig: 111

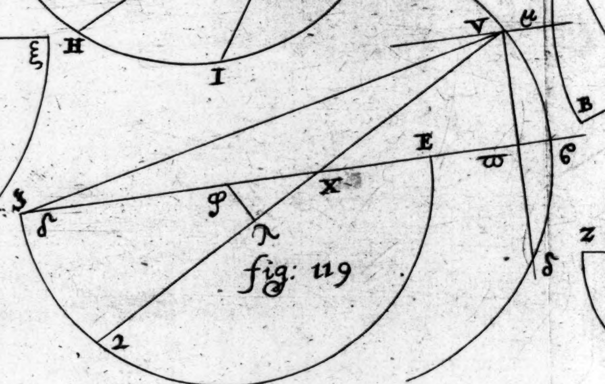

H z K L G X F y N F I R V E
φ ξ ψ T Q M C
fig 112


fig: 113
G б
B E C F Z
fi
114


F α б 2 Q
fig: 115
S X I R z H G


X V R Q N
z K L o F C E ξ δ V B
α б 2 G I H
fig: 117


F L x ξ H
fig: 116
Z G S 2 T 3


V u E ω б X φ λ δ 2 Z B
fig: 119

124.

fig: 14

F B E C

fig: 121

B N G I N H T C X V N F N K

125.

fig: 122

M A T R F A N E C C G H B

fig: 118

N M Z F C E D B P L G R

fig: 120

N M X C B

126.

arc $\frac{NR \pm : \varpi\sigma}{2} = NX$; item est $\frac{NZ \pm : Z\varpi}{2} = GZ$. erit ergò arc NR.NX :: NZ.GZ. quapropter erit (juxta præcedentem) NZ.GZ = NG.NE + CE.CG. Fig. 124.

VIII. Porrò liquet punctum Z esse locum imaginis, quem expetimus, oculo conspicuæ in recta Nϖ constituto; utpote circa quod viciniorum ipsi NP radiorum refracti ipsam Nϖ intersecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura ϐαττολογεῖν.

IX. Facilè verò, Secundum *Theorema præmissum*, designatur punctum Z. Ducatur nempe CG ad refractum NK perpendicularis; & ad connexam CN ducatur perpendicularis GV; & per V ducatur VZ ad CK parallela, secans ipsam NK in Z. factum erit. Nam, connexâ GE, liquet angulos GEC, GNC (circumducti nempe per N, E, G, C circuli subtensæ GE insistentes ambos) æquari; hoc est angulos GEC, VGC æquari. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti NEG, ZGV æquantur. item alterni GNE, VZG æquantur. ergò triangula GNE, VZG similia sunt, unde NG.NE :: ZV.ZG. itaque, CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG. verùm (ob refractionem) est NK.KC :: I.R :: CE.CG; hoc est NZ.ZV :: CE.CG. est igitur CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG; hoc est CE.CG + NG.NE = NZ.ZG. ergò punctum Z conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, è mox ostensis. adeò liquet propositum. Fig. 125.

X. Quin subnotamus rectam NK ad punctum Z ità dividi, ut sit NZ.ZK :: NGq.CGq. Etenim est NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq.

XI. Subjiciam & hoc è dictis consectarium *Theorema*:

Fiat $\surd$3Rq.$\surd$Iq − Rq :: CB.CQ; ductáque QN ad CB perpendicularis circumferentiæ occurrat ad N; radii verò MN ad CB paralleli refractus sit NK, circuli peripheriæ denuò occurrens in Z; dico punctum Z esse imaginem, qualem mox definivimus, oculo conspicuam in ipsa NK sito. Fig. 126.

Nam (ductis CE ad MN, & CG ad NZ perpendicularibus, ac junctâ CN) ob 3Rq.Iq − Rq :: CNq.NEq. hoc est 3CGq.CEq − CGq :: CNq.NEq; erit dividendo 4CGq —

$-CEq . CEq - CGq :: CNq - NEq . NEq :: CEq . NEq$. quare permutando $4 CGq - CEq . CEq :: CEq - CGq . NEq$. (hoc est) $:: NGq - NEq . NEq$. ergò componendo $4 CGq . CEq :: NGq . NEq$. & ideò $2 CG . CE :: NG . NE$. quare $2 . 1 + CG . CE = NG . NE$. vel $2 . 1 = NG . NE + CE . CG$. hoc est $NZ . GZ = NG . NE + CE . CG$. unde liquet, è mox antedictis, propositum.

XII. Ex ista porrò constructione facilè colligitur, si fuerit $3 Rq = Iq - Rq$ (hoc est si $2 R = I$) adeóque $CQ = CB$; quòd hujusmodi punctum Z non aliud erit ab ipso D; seu perpendiculari ipsi A B debitam imaginem ad punctum D consistere; eas verò quæ reliquis refractis conveniunt ejusmodi imagines intra circulum omnes, vel supra peripheriam extare. quinetiam si fuerit $2 R \sqsupset I$, adeoque $CB \sqsupset CQ$, patet nullius refracti imaginem in peripheria existere, sed omnes supra ipsam. Enim verò in his casibus omnes refracti axem A D supra punctum D intersecant. verùm si fuerit $2 R \sqsubset I$ (utique sicut reverà quoad plerasque cunctas in hac rerum natura pellucidas refringentes materias usu venit) utì reipsâ datur ejusmodi punctum Z, in perepheria T D alicubi situm, ità facilè poterit isto modo determinari.

XIII. Observetur porrò sic definitum punctum Z circuli partem à D versus T per radios quadranti B T incidentes illustratam terminare. Omnes enim ipso M N obliquiùs incidentium refracti ipsam N Z supra Z versus G decussabunt; adeóque ad partes Z D circulo impingent; item omnium ipso M N rectiorum refracti ipsam N Z infra Z versus K intersecabunt; & hinc etiam in arcum Z D cadent.

Fig. 127. XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Slusio* monitum amicus mihi communicavit) potuisse *Cartesium* sine tabularum confectione suum *Iridis* angulum determinare. nam assumpto arcu $DY = DZ$; angulum istum arcus Z Y metitur, posito circulum propositum per aquei globi centrum transire. quod ità facilè constat. Radii cujusvis diametro B C paralleli M N refractus N Z K reflectatur in Z F H; & Z F in F O refringatur; sitque F L ad B D parallela; sumatur etiam $DY = DZ$; & connectantur C Z, C Y; dico angulum L F O æquari angulo Z C Y. Nam imprimìs ob Z N, Z F æqualiter ad peripheriam inclinatos, patet angulum O F H angulo P N Z vel C K Z æquari. igitur ang. $HFL - HFO =$ ang $FIC - CKZ =$ ang

KIZ

KIZ — CKZ = ang NZI — 2 ang CKZ = 2 ang NZC — 2 ang CKZ = 2 ang. ZCD = ZCY. est igitur ang. OFL = ang ZCY. Cùm itaque sit in superiore Hypothesi punctum Z umbræ lucísque confinium, manifestè liquet propositum.

XV. Subnotetur autem, si medium inflectens sit aqueum, arcum ZY esse partem circuli totam (posticam scilicet) illuminatam; tangentis enim ST refractus, puta TV, nedum non punctum Y prætergreditur, at citra punctum D cadit. ast in densioribus mediis, velut in vitro, secùs accidere potest; siquidem in eo tangentis refractus, puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto designatum) cadit, ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY amplior evadit; tangentium quippe refractis circumscripta. Viderit igitur excellentissimus vir; an universim constet (id quod ipse nisi fallor innuere videbatur) ex observata partis illuminatæ quantitate, *Iridis angulum, etiam juxta Cartesianas Hypotheses, rectè determinari*. Nam sumendo arcum DR = DX; ad punctum quidem R pertinget illustratio; neque tamen ulla lux quadranti BT incidens à parte ZR (sed illa tantùm quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O inflectetur. unde quoad oculos ad has partes sitos, hoc est quoad rem quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque disterminat. Fig. 128.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc *apparentiarum in Iride ratio* elici possit, illâ fortè verisimilior, quam ipse *Cartesius* assignavit. quid enim si dixero peripheriæ ZV impingentem lucem, & versus O inflexam magis apparere; primò, quia spissior est, ac à radiorum geminâ diffusione constat, ab utraque puncti N parte in arcum ZV refractorum; tum secundò, quoniam obliquius ipsi ZV incidit, adeóque facilius & copiosius indè quàm aliunde versus partes O retorquetur? Et cum præsertim circa punctum Z acutiùs radii coëant, neque non incurrant obliquius; quidni propterea vividior exindè resultet apparentia? Verùm hæc παρεμβατικῶς. Fig. 128.

Quoniam Colorum incidit mentio, quid si de illis (etsi præter morem ac ordinem) paucula divinavero?

XVII. *Album* est quod lucem copiosam, pariter ubique spissam, circumfundit. Talia fermè sunt corpora, rarioribus poris interpuncta; præsertim, quæ multas superficieculas, in omne latus obversas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida semper alba videntur;

Quia

Quia corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit; Quoniam alba difficiliùs ignem concipiunt; Quòd humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli*, *Folia*, *Cineres*) *canitiem* acquirunt; Quibus & frigore constricta accenseri possent.

Nigrum est, quod lucem minimè, vel parcissimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbræ nigræ apparent*; Quod *Aqua*, *Vitrum*, *Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, calefiunt, comburuntur; Quòd longiùs dissita (quorum sensim intercipitur, & amittitur lux) obscuriora videntur.

Rubrum est, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac solito magis constipatam, ast interstitiis umbrosis diremptam, & interruptam. talia concipi possunt corpora, multas intra se quasi *fornaculas* & *focos* habentia (qualia X, è *Speculis cavis* contextum; & Y è *Sphærulis*, transmissam lucem ad totidem *focos* cogentibus, constans). Argumento sit, Quòd à *Speculis*, & *vitris ustoriis* collecta lux rubescit; Quòd corpora densa ignita (quippe quorum cellæ luce spissâ referciuntur) rubra videntur; Quòd roscida nubes Soli (matutino, vel vespertino) exposita rubet; Quòd erosio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasse pertinet, quòd compressa lux languidiùs emicat.

(margin: ... Lat. Fig. 128.)

Cæruleum est quod lucem raram, aut impetu segniore concitatam emittit. talia Videntur esse corpora, quæ particulis constant albis ac atris alternatim dispositis; sed & hunc subinde colorem ostentant candida maligniùs illustrata. Exemplo sint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, sale candido nimirum & humore pellucido constans; Umbra corporis cujusvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta seu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

(margin: è Lat. Fig. 128.)

Viride cæruleo perquàm agnatum est. *Discrimen* explorent sagaciores; ego non ausim ariolari.

Cæterùm reliqua colorata ex istis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioso, rubríque nonnihillo interspersо; *purpureum* ex multo cæruleo, rubríque tantillo, &c. Verùm sufficiat hâctenus, ista supra captum nostrum posita Scrutantes, nos illis, qui αἰτιολογίας *Physicas* morosiùs excipiunt, deridendos propinasse.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum est; ast interpositâ morâ, nè vix exorsi cogamur abrumpere. ||

Lect.

LECT. XIII.

I. *TRansactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quam ad circuli peripheriam subeunt radii sibimet paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui à puncto quopiam sensibiliter divergentes itidem circulo se objiciunt refringendos.* cùm autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietas è pluribus causis oriunda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quinetiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magìs aut minùs à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ità rem, quâ possumus, moderari, simul ut cùm ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquousque devitentur. id autem non alias, opinor, commodiùs assequemur quàm imprimìs generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi I ⊏ R, & radii convexis circuli partibus incidunt). Sic applicata, ut satìs facilè possint ad alios quoque transferri; tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando. ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Conjungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum) I.R::NK.NH=NK.NA+NA.NH=NK.NA+AC.CK: Q.E.D. Fig. 129. 3 Lect. num. 9.

III. Hinc si fuerit CA.CR :: I.R. erit CK.CR::NK.NA.

Nam

Nam erit tum CA . CR = CA . CK + NK . NA . unde, communem utrinque adjiciendo rationem CK ad CA, erit CK . CA + CA . CR = CA . CK + CK . CA + NK . NA . hoc est CK . CR :: NK . NA .

Fig. 130, Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo CA . CR :: I . R .
131. quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

IV. Hinc consectatur; primò; Si fuerit AN $\sqsubset$ CR, quòd re-
Fig. 129. fractus Nα cum axe AC prorsùm excurrens conveniet. Nam erit CK . AN $\sqsupset$ CK . CR :: NK . AN . adeóque CK $\sqsupset$ NK.

Fig. 130. V. Secundò; si fuerit AN = CR, refractus Nα ad AC parallelus erit.

Nam sit NH ad AC parallela . quum itaque sit CA . AN :: (CA . CR ::) I , R; erit AN ipsius HN refractus . ergò vicissim NH ipsius AN.

Fig. 131. VI. Tertiò; Si fuerit AN $\sqsupset$ CR, refractus Nα cum AC retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc CK . AN $\sqsubset$ CK . CR :: NK . AN . ac indè CK $\sqsubset$ NK.

VII. Hinc clarum est; Si fuerit AB non minor quàm CR, omnes refractos versus AC procurrentes convergere . erit enim tunc semper AN $\sqsubset$ CR.

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem AB = CR; axi propiores radios in sensibilem parallelismum refringi.

IX. Item, Si AT circulum tangat, & fuerit AT $\sqsupset$ CR; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum AC concurrere . tunc enim semper est AN $\sqsupset$ CR.

X. Clarum est quoque, si AN = CR, omnes arcui BN incidentium refractos retro productos, omnes autem arcui NT incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe I $\sqsupset$ R; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

1. Si

1. Si fuerit AN $\sqsubset$ CR, refractus Nα cum AC retrò tractus conveniet. Fig. 132.

Nam CK $\sqsupset$ NK. (ut in priore casu).

2. Etiam hîc si AN = CR, refractus Nα fit ipsi AC parallelus.

Nam erit CK = NK. quod in hoc casu nisi K infinitè distet contingere nequit.

3. Si AN $\sqsupset$ CR; refractus Nα prorsùm excurrens axi occurrit.

Nam hîc CK $\sqsubset$ NK.

4. Si AB $\sqsupset$ CR; omnes refracti directè progredientes ad AC convergunt. Erit enim quivis incidens AN $\sqsupset$ CR. Fig. 133.

5. Quum AN = CR, evidens est omnes arcui BN incidentes retrorsum versus CA refractos convergere; omnes autem ad partes NT cadentes antrorsum versus CB refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi; nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simpliciùs sese rem habere; scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratiori impungunt; id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequitur, & è simplice secundum illas linearum ductu dilucescit. His admonitis in orbitam regressi pergimus. Fig. 134, 135, 136.

XIII. E præmisso Theoremate non dificilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto K, refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum G, ut sit KG. AG :: CK. CR. item fiat GF. FA :: CK. CR (:: KG. AG). tum centro F, intervallo FG describatur circulus refringentem intersecans ad N; erit connexa NK incidentis AN refractus. *Lect.* 10. *Num.* 25. Fig. 137.

Nam ducatur FN; & ob KG. AG :: GF. FA. erit permutatim KG. GF :: AG. FA. dividendóque KF. GF :: GF. FA. hoc est KF. FN :: FN. FA. quare triangula KFN, NFA

assimilantur. unde NK.KF :: AN.NF. seu permutando NK.
Fig. 137. AN :: KF.NF. erat autem priùs KF.NF :: GF.FA :: CK.CR. est igitur NK.AN :: CK.CR. unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facilè *Consectaria* deducetis:

1. Si circulus GNH *refringentem* contingat ad H; ipsius AH (perpendicularis utique) refractus in K terminabitur; & aliorum incidentium refracti ad unas ipsius K partes (ultra nempe vel citra K respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius A positione resultantium) cadent.

2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omninò, *Problema* constructionem respuet; nec ullus refractus punctum K permeabit.

3. Si circulus GNH *refringenti* coïncidat (id quod facilè concipi potest, & in aliquo reverà casu contingit) omnes refracti in punctum K confluent. || Hæc & alia constructionem istam consectantur solerter expansem; quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit exertiùs ostendi; velut hoc imprimìs palmarium.

XV. Si fuerit AB.CR :: BZ.CZ; dico punctum Z esse limitem, ultra vel citra quem nullus refractus axim intersecat; seu perpendicularis ipsius AB refractum in Z terminari.

Nam cujusvis incidentis AN refractus axi occurrat in K, erit ideò CK.CR :: NK.NA. ergò quum sit CR.CZ :: AB.BZ; erit CK.CR + CR.CZ = NK.NA + AB.BZ.

Fig. 138. 1. Est autem (in prima figura, ubi puncta Z, & K sunt ad partes centri, vel ubi refracti ad axem directè procurrentes convergunt) BK ⊏ NK, & AB ⊐ AN; adeóque BK.AB ⊏ NK.NA. ergò CK.CR + CR.CZ ⊐ BK.AB + AB.BZ. hoc est CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel inversè permutando BK.CK ⊏ BZ.CZ. dividendóque BC.CK ⊏ BC.CZ. ergò CK ⊐ CZ; adeóque punctum K supra Z existit, versus centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139. 2. In secundâ verò figura (ubi puncta Z, K ad alteras supra punctum A partes à centro aversas cadunt) connectatur subtensa BN, & ducatur AS ad KN parallela; hæc secabit angulum BAN, majorem ipso BKN, vel BAS; & cùm angulus ABN sit obtusus, èrit AN ⊏ AS. adeóque KN.AN ⊐ KN.AS :: KB.AB. erit etiam hîc igitur (ut supra) CK.CZ ⊐ BK.BZ. vel permutatim CK.BK

$\sqsupset$ CZ.BZ. dividendóque CB.BK $\sqsupset$ CB.BZ. adeóque BK $\sqsubset$ BZ; hoc est punctum K magis quàm Z à centro elongatur.

3. Haud dissimilis in aliis casibus erit *Demonstratio*; ut in hoc, ubi Fig. 140.
I $\sqsupset$ R, ad convexas; est enim hîc (ut in præcedente) KB.AB $\sqsupset$ KN.AN. adeóque (supra monstratis insistendo) CK.CZ $\sqsubset$ KB.BZ. vel permutando CK.KB $\sqsubset$ CZ.BZ. dividendóque CB.KB $\sqsubset$ CB.BZ. unde KB $\sqsupset$ BZ. adeóque punctum K centro semper vicinius est quàm Z.

XVI. Hæc autem cùm, modo suo mutatis mutandis, ad omnes casus transferri possint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc est apparentia radiantium punctorum A loca, respectu oculi centrum habentis in axe AC situm; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hîc in duobus casibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit observandum cùm sit CB = CR, omnes refractos in ipso puncto Z (ut suprà definito) retrò protractos congregari. Nam ob AB.BC :: AB.CR :: BZ.CZ. erit dividendo AC.BC :: BC.CZ. quapropter ad punctum quodvis N adsumptum connexis AN, ZN, erit ZN.AN :: (CZ.CN ::) CZ.CR. unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam si fuerit AB = CR, consequetur punctum Z Fig. 141.
à centro infinitè distare; quia nempe tum ob AB.CR :: BZ.CZ, erit BZ = CZ; id quod fieri nequit, nisi punctum Z ita elongetur infinitè.

XIX. *Consectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A, α limites Fig. 142,
sint puncta Z, ζ, erit AC.AB + BZ.CZ = αC.αB + Bζ. 143.
Cζ.

Nam è præmissis facilè constat esse

$$\left.\begin{matrix}\text{tam } AC.AB + BZ.CZ = \\ \text{quam } \alpha C.\alpha B + B\zeta.C\zeta = \end{matrix}\right\} I.R.$$

XX. Unde Cζ $\sqsubset$ CZ. Nam ob BC.AB $\sqsupset$ BC.αB. componendóque AC.AB $\sqsupset$ αC.αB. erit BZ.CZ $\sqsubset$ Bζ.Cζ. dividendóque BC.CZ $\sqsubset$ BC.Cζ. adeóque Cζ $\sqsubset$ CZ.

Fig. 144. XXI. Imò universim si radii quivis AF, αφ ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hísque conveniant refracti FL, φλ, erit Cλ $\sqsubset$ CL. id quod hoc modo non inelegantèr ostenditur. Ducatur recta BX cum BC angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; perque puncta F, φ; & centrum C transeuntes rectæ ipsi BX occurant punctis P, ϖ. tum quoniam triangula FCL, BCP æquiangula sunt (angulus enim CBP angulo CFL ex constructione par est, & ang. BCP verticali suo FCL æquatur) nec non latus CB lateri CF æquatur, erit CP = CL. Simili planè discursu est Cϖ = Cλ. Porrò, quia Cφ ad Cα (hoc est Sinus anguli Cαφ ad Sinum anguli Cφα) majorem rationem habet, quàm CF ad CA (hoc est quàm Sinus anguli CAF ad Sinum anguli AFC, vel æqualis anguli Cφα) liquet angulum Cαφ majorem esse angulo CAF, adeóque reliquum αCφ minorem esse reliquo ACF; vel angulum PCB angulo ϖCB. unde liquet esse Cϖ majorem quàm CP; hoc est Cλ majorem esse quàm CL: Quod E.D.

Coroll. Vides arcum BF majorem esse arcu Bφ.

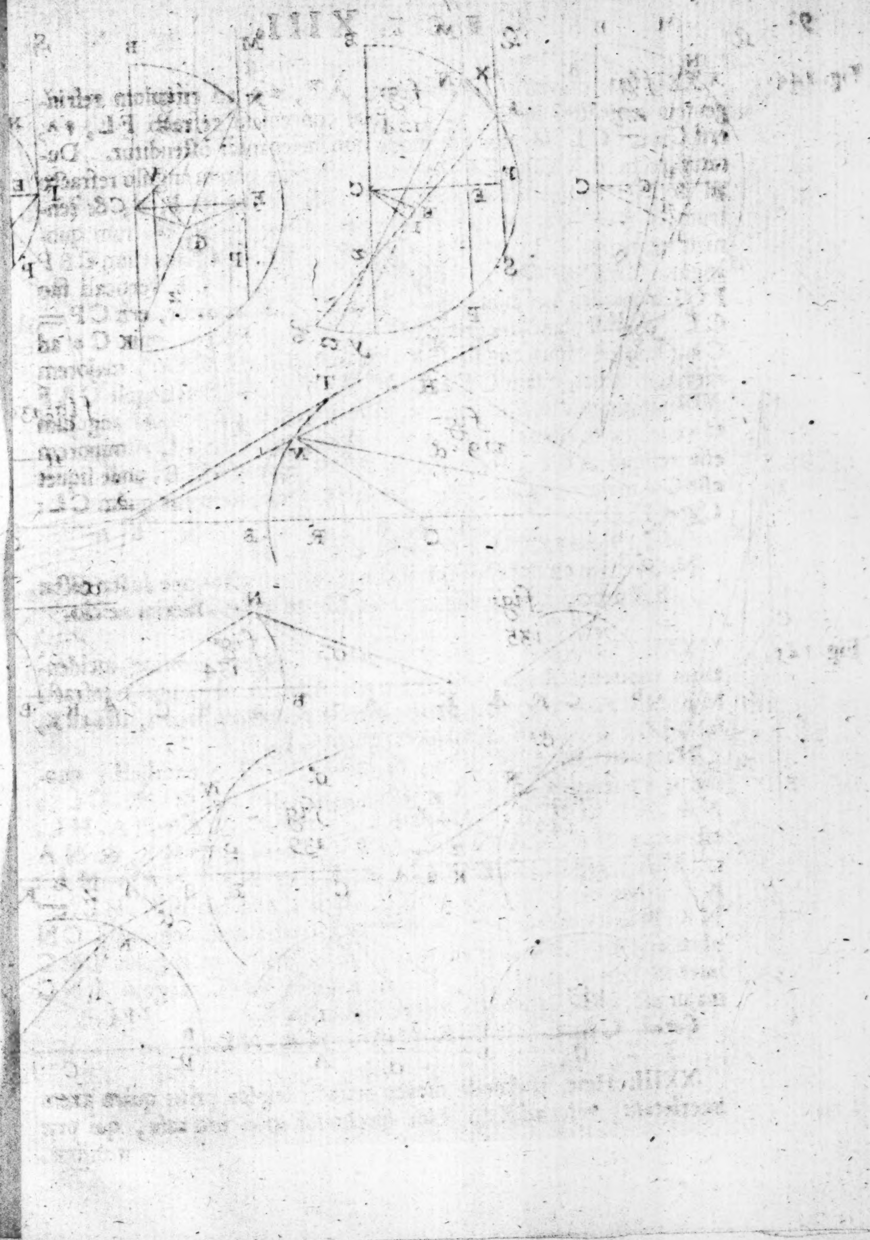
Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ BX promptissimè designari. sed hæc an περίεργα fuerint nescio.

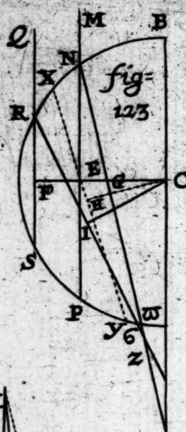
Fig. 145. XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentium radiorum AM, AN (quorum AN sit obliquior) refracti MK, NL axem ad easdem partes, directè pergentes, secent, iste ad K, hic ad L; dico fore CK majorem quàm CL.

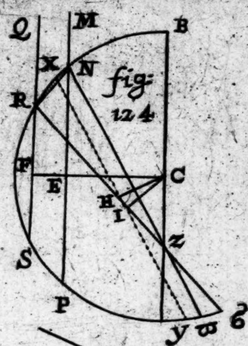
Nam connexis CN, KN; & ductâ LH ad KN parallelâ; quoniam, è præmissis, est CK. CR :: MK. MA. & CR. CL :: NA. NL. erit CK. CK + CR. CL = MK. MA + NA. NL. est autem NK. NA $\sqsupset$ MK. MA (quia NK $\sqsupset$ MK, & NA $\sqsubset$ MA) ergo CK. CR + CR. CL $\sqsubset$ NK. NA + NA. NL. hoc est CK. CL $\sqsubset$ NK. NL. hoc est NK. HL. $\sqsubset$ NK. NL. quapropter est LH $\sqsupset$ NL. est autem angulus LCN obtusus; ergò recta LH angulum CLN secat; ac angulus LHC interno LNC major est; hoc est angulus KNC angulo LNC major est, unde liquidò patet fore CK $\sqsubset$ CL.

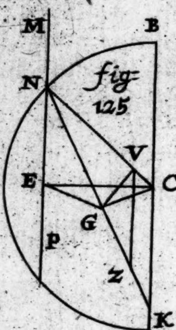
Coroll. CK. CL = MK. MA + NA. NL.

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipsos priùs quàm axem intersecant, velut ad X. || Hoc speciminis loco pro casu, qui præ manibus.

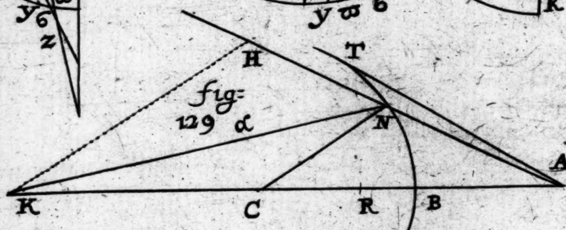


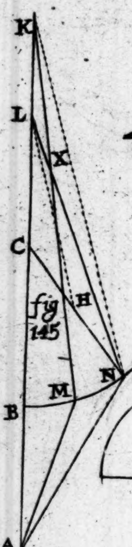

fig: 123
Q
M
B
N
X
R
E
F
G
C
H
I
S
P
y
6
ϖ
z


fig: 124
Q
M
B
X
N
R
F
E
C
H
I
z
S
P
y
ϖ
6


fig: 125
M
B
N
V
E
C
G
P
z
K


S
T
P


fig: 129
α
H
T
N
A
K
C
R
B


fig 145
K
L
X
C
H
N
M
B
A

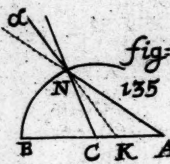
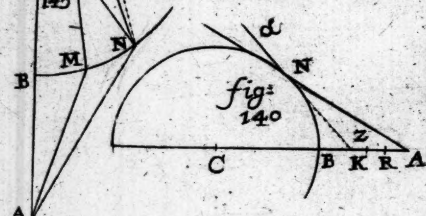
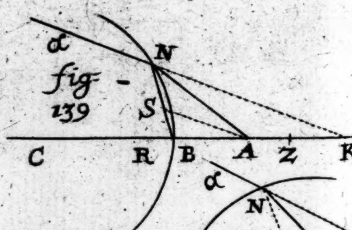
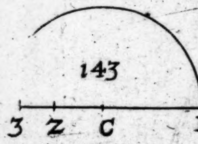
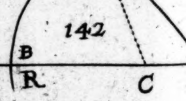

fig: 135
α
N
B
C
K
A

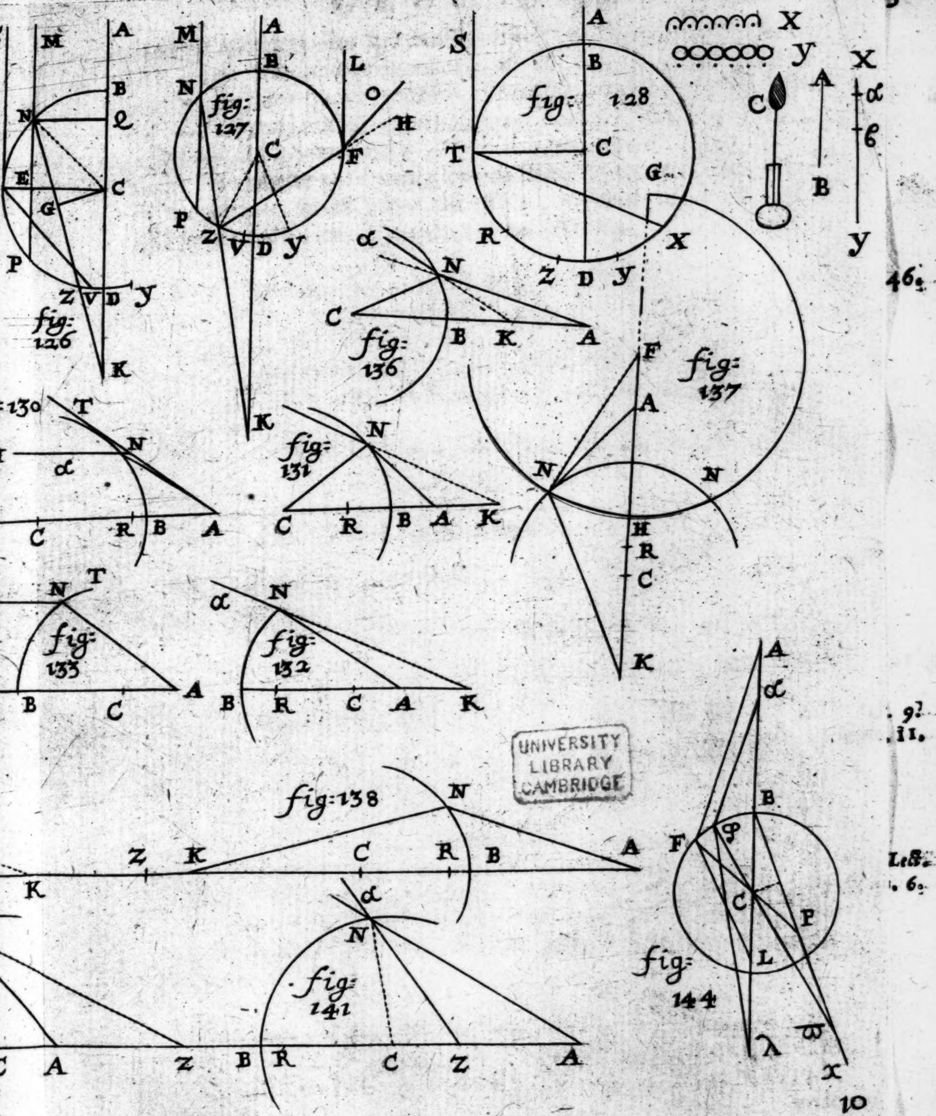

fig: 134
N
α
K
R
B
C
A


fig: 140
α
N
z
C
B
K
R
A


fig: 139
α
N
S
C
R
B
A
Z


143
3
Z
C
B
α
A


142
α
N
B
R
C


fig: 126
fig: 127
fig: 128
fig: 131
fig: 132
fig: 133
fig: 136
fig: 137
fig: 138
fig: 141
fig: 144
UNIVERSITY LIBRARY CAMBRIDGE

manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatissimum Problema* (cujúsque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximorum concipiantur refracti N ϖ, R σ sese puncto Z decussantes; bisecentúrque subtensæ NP, N ϖ punctis E, G; (à rectis nempe CE, CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è rationibus CE ad CG (hoc est I.R), NG ad NE, ac AN ad AE componi. Fig. 146.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad R σ perpendiculares; in que productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI; & per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad N ϖ parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam arcuum indefinitam parvitatem). ergò $\frac{AP \pm: AN}{2}$. AN :: $\frac{\text{arc } PS \pm: \text{arc.} NR}{2}$. arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc NR. item est NZ. Z ϖ :: arc NR. arc $\varpi\sigma$. ac indè NZ. $\frac{NZ \pm: Z\varpi}{2}$ :: arc NR. $\frac{\text{arc } NR \mp: \varpi\sigma}{2}$. *hoc est NZ. ZG :: arc NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN + NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I. R :: CK. CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit, *juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG :: + CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit ostendere.

* Lect. 9. Num. 11.

* 12 Lect. Num. 6.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L. M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG + AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.

unde

unde Problematis constructio, seu puncti Z determinatio habetur.

Fig. 147. XXVI. Subnectam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipso, concinnéque demonstratam) constructionem: Duc N R incidenti A N perpendicularem, & secantem axin in R. Fac N P . N ϖ :: N R . T . duc N Q refracto N K perpendicularem, & æqualem ipsi T; denique jungatur Q C; hæc producta secabit N K in foco quæsito Z.

XXVII. Hujusmodi verò punctum Z esse locum ipsissimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipsa N ϖ constituto, sæpiùs expositæ rationes manifestant.

*In Num. 25. XXVIII. Attendenti porrò constabit, siquidem fuerit *N G ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo distabit; seu proximi radio N ϖ refracti ipsi N ϖ paralleli erunt; sin ratio N G ad M sit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z existet infra G, vel in N G antrorsum protracta; verùm denuò si N G ⊐ M, quod punctum Z supra N, vel in N G retrò tractâ versatur. Hæc suffecerit innuisse. Hinc etiam posticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque possit determinari. sed ad locum Solidum res spectat, ipsámque proinde missam facio.

Fig. 148. XXIX. Inseremus autem hîc *Phænomeni* cujusdam satis obvii, quódque nonnullis forsan (*utpote communibus Opticæ decretis apparenter adversum*) mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè distantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem M B N (ab axe A B bisectum) imago, seu focus Z; & per Z, ad ipsam A Z perpendicularis traducta concipiatur linea X Y. porrò, desumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum versus) jacere; ductis itaque rectis E M, E N, harum refracti adhuc altiùs se intersecant, puta ad K; productæque M K, N K lineam X Y secent punctis O, P. quinetiam ulterius accipiatur punctum F; ductarúmque rectarum F M, F N refracti sint M L, N L; lineæ X Y occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifestum est intervallum R S ipso O P majus esse. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & stellæ fixæ) quæ propter exiguitatem suam apparentem punctorum ad instar haberi possunt) quò a distinctæ visionis loco longiùs amovetur, eò (contra quàm in aliis visibi-

vifibilibus obvenit) majus apparet. Nam fi arcus M N B oculi fuperficiem repræfentet, *(pupilli amplitudini refpondentem)* linea X Y fundum oculi, A locum diftinctæ vifionis; ejufmodi lucens ad A pofitum fatìs anguftum circa Z fpatium illuftrabit; ad E verò conftitutum, validè radios vibrans, totum corufcatione fuâ fpatium O P afficiet; ad F denique collocatum adhuc majus intervallum R S percellet, indéque grandiorem fui fpeciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter fe habet, quoniam pauciores, & languidiùs agentes qui extremis O, P vel R, S allabuntur radii nullam fui perceptionem excitant. Fig. 148.

Eò lubentius hanc, adeò perfpicuam, hujufmodi *Phænomenων* affignamus rationem, quoniam in eorum reddendis caufis ità titubat magnus ille *Galilæus*, nefcio quos, ex refractionibus, reflectionibúsve quibufdam commentitiis oriundos, afcititios fuggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam fimplicem circularem claudemus*, quam utcunque quàm pauciffimis ità complexi fumus, ut præcipua faltem (quæ videbantur) & notatu digniora perftrinxerimus. prius autem *Catoptricam circularem*; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum inftituto noftro vifum eft congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propofitum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præfertim fectiones, haud diffimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cùm in his tricis *Geometricis* etiamnum fatìs fupérque commoratus fim; & præter ea quæ circa conicas fectiones à nobis pridem infinuata funt (quæ & ab aliis luculentè tractata proftant) reliqua non ità magnum ufum fpondeant; contentus hafce primarias, in ufu maximè pofitas, & ufui præfertim accommodatas fuperficies, ultra paullò quàm hactenùs attentatum aut peractum fcirem, excuffiffe; cæteras omninò miffas faciam.

XXXI. Porrò, quoad inflectiones iftas, quos pluribus fucceffivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcunque conftitutis aut compofitis, incidentes fubeunt radii; quæ conveniunt illis Symptomata, poffunt ea de præmiffis elici; quorum certè præcipuum eft, quod apparentis puncti locum refpicit ab inflectionibus ad iftas fuperficies factis refultantem; in hoc enim indagando, determinandóque potiffimùm hæ difquifitiones verfantur; Hunc igitur faltem definitum exhibebimus, idque fatìs commodè, ex uno quodam Theoremate, feu regula generali; cui exempla quædam, communis usûs in gratiam felecta, eorúmque qui in hæc inciderit minuendo labori præfertim comparata, fubjungemus. Ifta verò, nè jam tædio Sinus, fequenti refervamus.

Lect. XIV.

I. *Sub præcedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis stipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus resultantes, imagines dignoscantur. illam nunc exhibemus quàm simplicimè conceptam.*

Fig. 149, 150. Sit A B E F O radius principalis, puncti radiantis A speciem per oculi centrum O deferens, ex incidente primo A B, & inflexis B E, E F, F O (in directum aut secùs dispositis) constans; tum puncti A respectu oculi in recta B E positi, & ex inflectione ad superficiem B resultans (è præmissis utique designabilis) imago sit Z. item hujus Z (quod jam veluti radians concipiatur) respectu oculi in recta E F constituti, & ab inflectione ad superficiem E emergens imago sit Y; demùm puncti Y (tanquam in superficiem F radiantis) respectu oculi in F O collocati sit imago X. erit hoc punctum X imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque secùs quotcunque fuerint inflectiones sese res habebit; enimverò semper ex illa tali postrema inflectione resultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è constructione satìs apparet; è qua facilè colligitur proximorum ipsi A B incidentium hinc indè radiorum inflexos tandem circa punctum X ipsum F X intersecare. vel ità rem collegeris: punctum Z est puncti A imago; & punctum Y ipsius Z; denuóque punctum X ipsius Y; itaque punctum X ipsius A imago erit, qualem nempe res hìc fert, remota. Strictiore longiusculo discursu posset hoc comprobari, sed quorsum rem satìs claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, seu è præmissis deducta consectaria subnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis pròponuntur designandæ, oculum respicere Centrum habentem in ipso radiationis axe (qualis est recta B D) constitutum. item diversarum superficierum ac radiationum axes sibimet in directum poni. præsumatur etiam in refractionibus ex aëre factis ad vitrum fore I. R : : 5 . 3; ad aquam verò fore I . R : : 4 . 3. (hæ nempe rationes veris probè congruæ

depre-

deprehenduntur) : addo, confusionis evitandæ causâ symbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò densius intelligatur rariori circundatum. item, in figuris appositis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum posterioris; & B verticem anterioris, D verticem posterioris; denuò designat Y locum imaginis quæsitam.

Hisce præmonitis, primum de longinquo radiantium, seu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, sic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.* Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat I — R. R :: DK. DY.
In Vitro est $DY = \frac{1}{2}KD$.
In Aqua est $DY = 3KD$.

III. *Ad lentem convexo-planam.* Fig. 151, 152.

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

Fiat $\left\{\begin{array}{l} I - R.I :: BC.BZ; \& \\ I.R :: DZ.DY. \end{array}\right.$
In Vitro $DY = \frac{1}{2}BC - \frac{2}{3}BD$.
In Aqua $DY = 3BC - \frac{3}{4}BD$.

V. *Ad lentem convexo convexam.* Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat $\left\{\begin{array}{l} I - R.I :: BC.BZ; \& \\ \frac{I}{R}KZ - DZ.DZ :: DK.DY. \end{array}\right.$

Coroll. *Ad integram Sphæram.*
Fiat 2I — 2R.I :: CD.CY.

VII. *Ad lentem convexo-concavam.* Fig. 152, 153.

VIII. *Ad lentem concavo convexam.*

Fiat I — R.I :: BC.BZ. &

Fig. 152, 153. 1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac $DZ + \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis verſus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & ſit inſuper $DZ \sqsubset \frac{I}{R}KZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis verſus K.

3. Si $DZ = \frac{I}{R}KZ$, imago Y infinitè diſtabit.

4. Si $DZ \sqsupset \frac{I}{R}KZ$; fiat $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape DY ad partes lentis adverſas ipſi K.

De ſenſibiliter autem propinqua diſtantia radiantium ſeu divergentes radios emittentium punctorum (qualia ſemper deſignat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejuſmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154, 155. I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ, \ \& \\ I . R :: DZ . DY . \end{cases}$

Brevius. Fiat $I . I - R :: BD . AY$.

Fig. 156. III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano concavam converg.*

Fiat $R . I :: AB . BZ$. & cum Z cadit

1. Extra DK, ſi $\frac{I}{R}KZ \sqsubset DZ$; fac $\frac{I}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY ad partes lentis adverſus A.

2. Si $\frac{I}{R}KZ = DZ$; imago diſtabit infinitè.

3. Si $\frac{I}{R}KZ \sqsupset DZ$; fac $DZ - \frac{I}{R}KZ . DZ :: DK . DY$; & cape DY verſus A.

4. Cùm

4. Cùm Z cadit inter puncta D, K; fac $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ ::$ $DK . DY$; & cape DY versus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.* Fig. 156, 157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat $\begin{cases} R . I :: AB . BZ; \text{ \&} \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY. \end{cases}$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.* Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$. & $I . R :: DZ . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, imago infinitè distabit.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; deprehendentur Z, & Y versus A, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $I . R :: DZ . DY$.

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.* Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C, fac $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; tum fiat $I . R :: DZ . DY$.

Fig. 158, 159. XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$, facto $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK . DY$; puncta Z, Y adversus A cadunt.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$, fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape DY adversus A.

3. Si $AB \sqsupset \frac{R}{I} AC$; fac $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & sume BZ versus A. Jam cùm Z cadit extra DK, si primò sit $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY adversus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago distabit infinitè.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; sumatúrque DY versus A.

Corol. Ad integram Sphaeram diverg.

1. Si $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$; fiat $AB + AC - \frac{2R}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape CY adversus A.

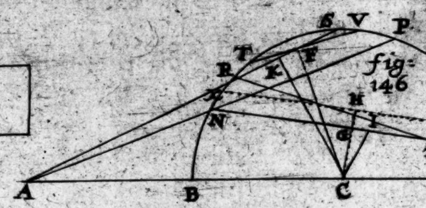
2. Si $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$; imago in infinitum abit.

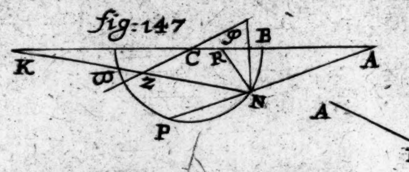
3. Si $AB + AC \sqsupset \frac{2R}{I} AC$; fiat $\frac{2R}{I} AC - AC - AB . AC :: BC . CY$; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159. XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

fig 155 2

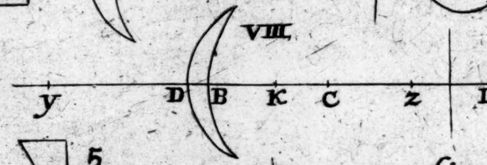


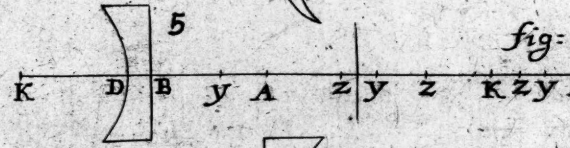


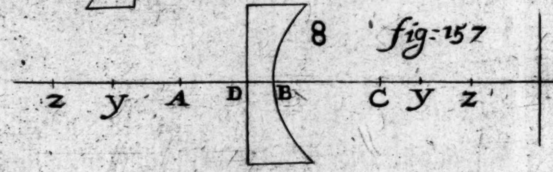


fig= 154 1









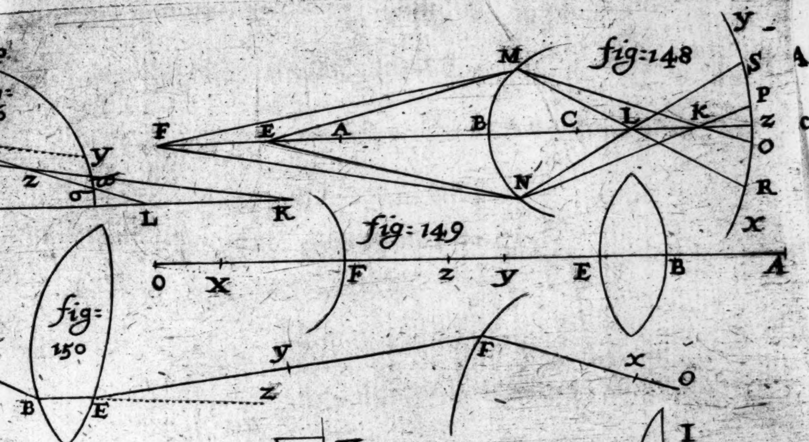


Fig. 159.

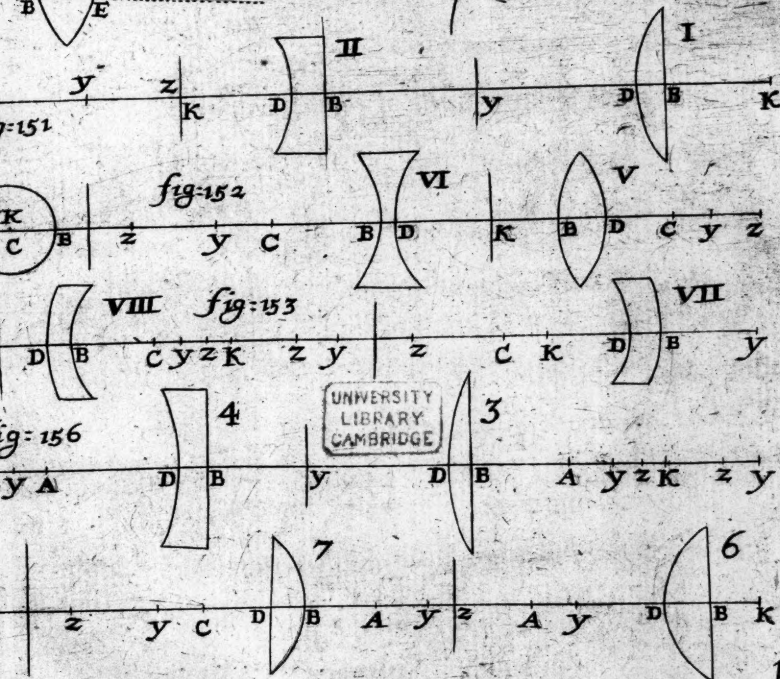


Fig. 160, 161.

Si A cadat extra B C, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; deinde fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$. Fig. 159.

Coroll. Ad integram Sphæram converg.

Si punctum A extra B C ponatur, fiat $AB + \frac{I - 2R}{I} AC :: BC . CY$. sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{2R - I}{I} AC . AC :: BC . CY$; & cape C Y ad partes centri versus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.* Fig. 160, 161.

XVI. *Ad lentem concavo-convexam converg.*

1. Si $AB ⊐ \frac{R}{I} AC$; puncta Z, & Y versus A cadunt, facto $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ$; & $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$.

2. Si $AB = \frac{R}{I} AC$; fac $I - R . R :: DK . DY$; & cape D Y versus A.

3. Si $AB ⊏ \frac{R}{I} AC$; fac $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; & cape B Z adversus A. Jam quum Z cadit extra D K, tum primò si $\frac{I}{R} KZ ⊏ DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$; & cape D Y versus A.

4. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imago infinitè distabit.

5. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ ⊐ DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$, & sume D Y adversus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sumatur D Y adversus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160, 161, 162. XVII. *Ad lentem concavo-convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$; sin A cadat inter B, & C; fiat $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$.

1. Jam cùm Z cadit extra D K, tum primò si $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$, fac $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$, & cape D Y adversus A.

2. Secundò, si $\frac{I}{R} KZ = DZ$, imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, si $\frac{I}{R} KZ \sqsupset DZ$, fac $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & sume D Y versus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$; & accipiatur D Y versus A.

Hisce subnectam sequentia; non contemnendum in *Engyscopicis* usum præ se ferentia *Problemata*.

Fig. 163. **I.** *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinius projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ resultat ex omnibus, quos ipsum A diffundit, radiis in ipsa readunatis.)

Fiat $I - R . R :: AZ . ZB$. & dividatur Z B in C, ut sit $CB . CZ :: I . R$. tum centro C describatur circulus E B F. item centro Z intervallo quovis Z D (majori quam Z B) describatur circulus G D H; factum erit; nempe lens E F G H puncti A perfectam imaginem in punctum Z projiciet.

Nota, datâ C B puncta A, Z è propositis facilè determinari.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{matrix} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{matrix} \right\}$ & $\left\{ \begin{matrix} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{matrix} \right.$

Adnotetur etiam per lentem E G H F ad Z tendentes radios ad A refringi.

Hujusmodi

Hujusmodi Vitrum Myopes juvat; pro quibus ità construatur: sit Z D distantia, ad quam optimè cernunt; sumatúrque Z B utcunque paullo minor quàm Z D; & fiat $CB = \frac{2}{5} ZB$; tum centro C per B describatur circulus E B F, & centro Z per D circulus G D H describatur; ipsi (Superficiei G D H oculum admoventes) punctum A distinctè spectabunt, velut ad Z situm.

Quòd si velit *Myops*, ad distantiam itidem Z D distinctè cernens, assignatum punctum A contemplari; adsumpto, ut prius, liberè puncto B, fiat $CB = \frac{2\,AB \times ZB}{5\,AB - 3\,ZB}$; & reliqua fiant, ut prius.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concavo-convexæ, in datum aliud punctum Z longinquius projicere.* Fig. 164.

Fiat $AZ \,.\, AD :: I - R \,.\, R$. item dividatur A D in C, ut sit $CD \,.\, CA :: I \,.\, R$; & centro C per D describatur circulus E D F. item centro A, quopiam intervallo A B (minori quàm A D) describatur circulus E D F; factum erit; nempe lens E D F puncti A imaginem in punctum Z projiciet.

Datâ C B, puncta A, Z vicissim è propositis innotescunt.

In vitro, si $CB = 15$, erit $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{array} \right\} \& \left\{ \begin{array}{l} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{array} \right.$

Itidem & hîc, per lentem E F versus Z tendentes radii in A refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitrum*, hoc pacto: Ad intervallum Z D hi distinctè videant. Secetur Z D in A, ut sit $AD = \frac{2}{5} ZD$. item sit $CD = \frac{5}{8} AD$ (vel sit $CD = \frac{1}{8} ZD$) centróque C per D describatur circulus E D F. item utcunque sumpto puncto B (citra D nempe, versus A) centro A per B describatur circulus E B F. lente E F dicti *Presbytæ* punctum A distinctissimè conspicient. ||

Hisce demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuscunque casûs imaginem Geometricè designandi; ut & lentem describendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

1. *Imaginem designare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem constituentium erigantur ad axin perpendiculares K j, B P, D Q, C I; deinde per punctum A ducatur quævis recta A P I secans B P, & C I in P, & I. fac $CI \,.\, CR :: I \,.\, R$. agatur recta R P secans D Q, & K ϱ in Q, & ϱ; fac $K\varrho \,.\, Kj :: R \,.\, I$; & agatur ι Q, quæ producta secabit axin in Y, loco imaginis quæsito. || Fig. 165, 166, 167.

2. Re-

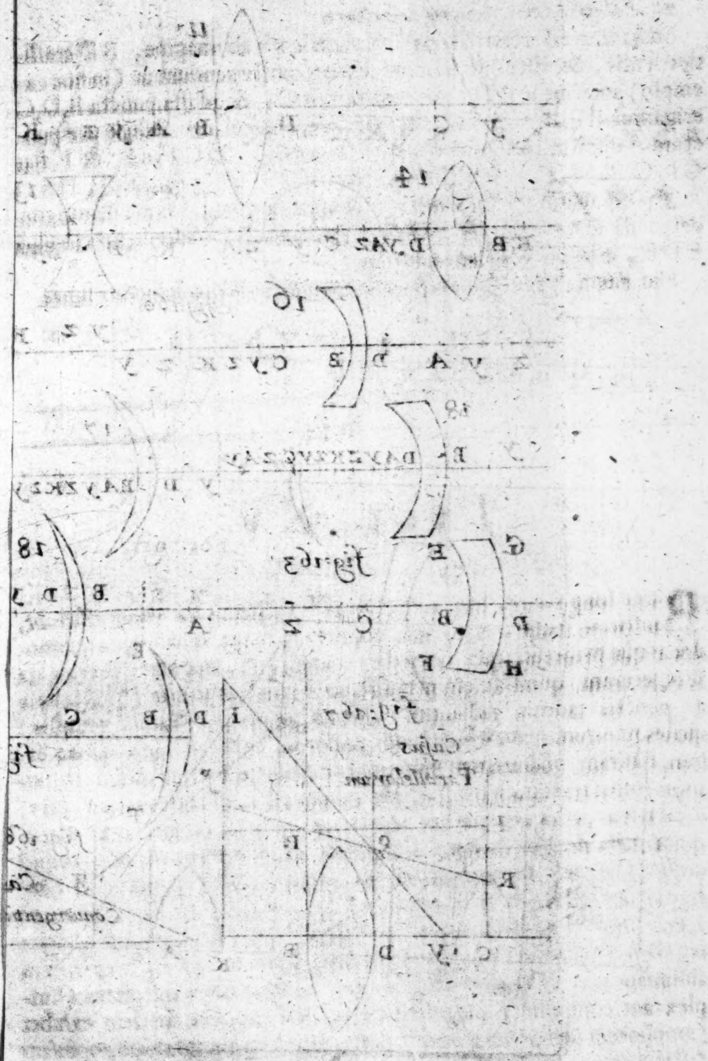
Fig. 168. 2. *Reliquis datis, lentem describere.*

Sumantur ad arbitrium B Y distantia lentis ab imagine, B D crassities lentis, & alter circulorum lentem constituentium ut (in hoc exemplo) anterior E B F, cujus centrum sit C; & ad ista puncta B, D, C erigantur B P, D Q, C I ad axin perpendiculares. deinde per punctum A ducatur recta quævis A P I secans B P, & C I in P, & I. fiat C I. C R :: I. R; & agatur R P secans D Q in Q. fiat D Q. D S :: I. R; & agatur S Y secans R P productam in ς; à quo demittatur perpendicularis ς K; & centro K intervallo D K describatur circulus E D F; erit E B F D lens quæsita.

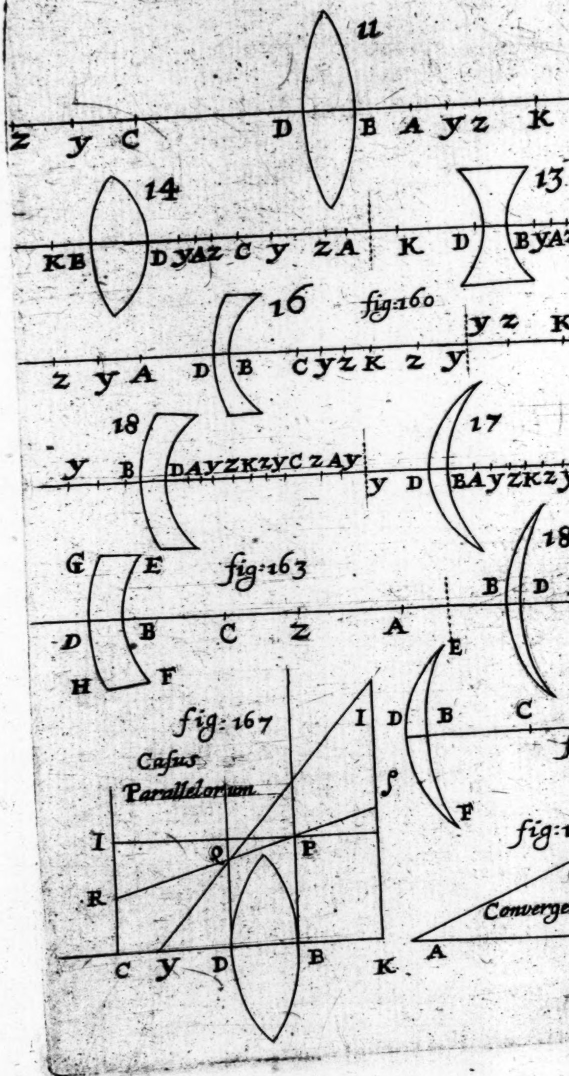
Hic autem in nimium excrescenti spatium Lectioni defigatur limes.

LECT. XV.

BEne longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ visum afficiunt, instituto stadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodocunque prosecuti, quæ πρεργαίτερα nobis visa, nec adeò pervulgata se objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantùm radiantibus agentes omnino videamur omisisse) quales nimirum illæ ex hujusmodi radiorum inflectionibus quoad situm, figuram, quantitatem mutationes subeunt, id fermè totum passim atque fusiùs tractatum prostat, nec animus est mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò spectantia pleraque cuncta de jam definitis ac ostensis haud difficili negotio colligi posse videntur; singulorum nempe cujusvis objecti punctorum (extremorum præsertim ac mediorum) apparentias indè determinando. verùm nec ea penitus neglectui habita, ad subsequentem quoque regulam (seu monitiunculam) pressiùs animum advertentes forsan autumabitis. Si qualem assignata quævis superficies inflectens (simplex aut composita) magnitudinis cujusvis expositæ speciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inversam, confusam distinctámve, seu quovis alio modo demutatam) internoscere cupiatis,



Fi



11
Z y C D B A y z K
14
K B D y A z C y z A
13
K D B y A
16
fig:160
y z K
z y A D B C y z K z y
18
y B D A y z K z y C z A y
17
y D B A y z K z y
G E
fig:163
D B C Z A
H F
E
B D
fig:167
Casus Parallelorum
I D B C
I
Q P
R
F
fig:1
Converge
C y D B K A

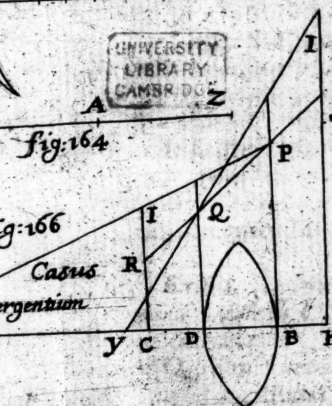

fig:158
10
9
K z yA z y C z A y D B A z y C zAyB D

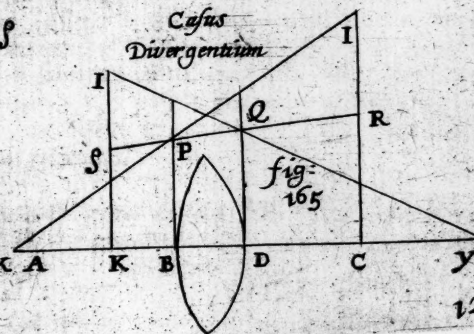

13
fig:159
12
yAzC y zA y D K C BAy yz KzyAD B C y z


15
K z y C D B A y z K yB yACyA D y A
fig:161.

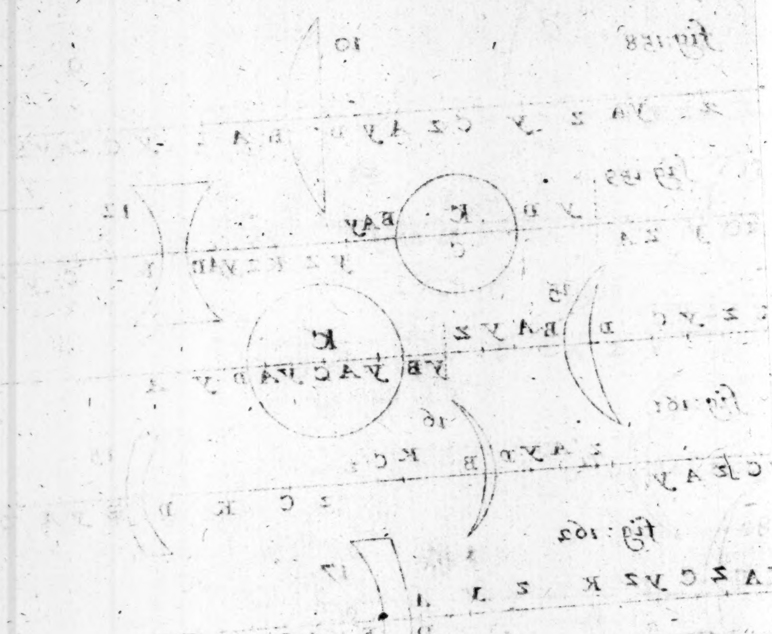

16
15
z A y D B K C z z C K D B y A z
zzyC zAy
fig:162
18
17
D yA z C y z K z y A D B y A z C y z K z y A

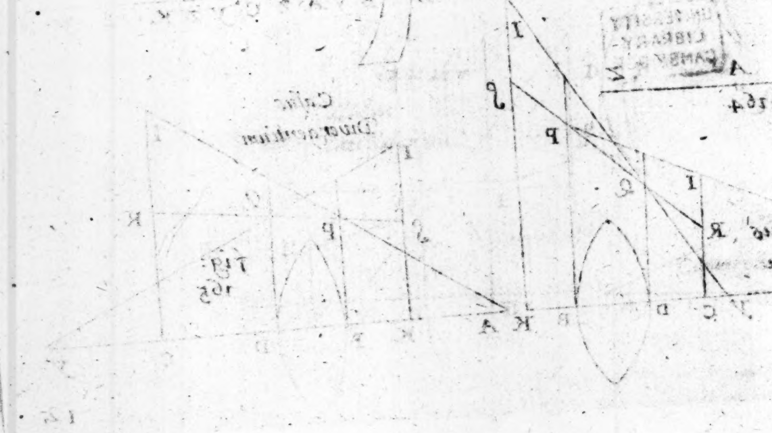
Fig. 169.


fig:164
A z
fig:166
I
S
P
I
Q
R
Casus
ergentium
y C D B K


Casus
Divergentium
I
I
Q
R
S
P
fig:
165
A K B D C y
12

g. 170.





id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari passim supponitur, ei saltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu constitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propositam superficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas specialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè species inter duos primos ab oculi centro procedentes radios consistet, quæ cum ipso (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correspondentium positionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectiùs, si extremorum ac mediorum præsertim objecti punctorum justas imagines, ex doctrina hactenus tradita, velitis investigare. ab appositis exemplis res manifestior evadet; in quibus notetur punctum O semper oculi centrum, rectam O B A radiationis axem (superficiebus inflectentibus perpendicularem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

Exemp. I. *Proponatur Superficies plana medii refringentis densioris (aquæ si placet, aut vitri) objectum continentis*, veluti Superficies à recta M N repræsentata. & ab oculi centro O prodeant utcunque duo radii O M, O N; qui in M F, N G refringantur; inter hos jam designetur objectum F A G (ab axe O A bisectum) hujus è medio F G M N spectati species (vel apparentia) alicubi consistet inter rectas O M, O N, veluti puta ad $\varphi \alpha \gamma$. cùm autem (ut ex hujusce superficiei natura, communique refractionum lege palàm est) sit angulus $\varphi O \gamma$ major angulo F O G; hæc objecti speciem amplificat inflectio. item cùm puncta (sibi respondentia) F, φ; & G, γ ad easdem respectivè partes jaceant, ab eadem objecti posito non immutatur. quòd si punctorum φ, α, γ positio juxta superiorem doctrinam strictiùs exquiratur, de totius imaginis $\varphi \alpha \gamma$ figurâ distantiâque satìs accuratum feretur judicium. Fig. 169.

Exemp. II. *Proponatur corpus densum* P M N Q, *Superficiebus planis parallelis* (M N, P Q) *comprehensum*; & ab oculi centro O prodeuntes radii O M, O N ad superficiem M N refringantur in M P, N Q; horum verò ad Superficiem P Q refracti sint P F, Q G (qui, propter incidentias (ad M, P, & N, Q) pares, ipsis O M, O N æquidistabunt) inter P F, Q G statuatur objectum F A G, cujus sit imago $\varphi \alpha \gamma$; tum verò manifestum est hìc se rem similiter habere ac in Exemplo præcedenti. Fig. 170.

 Exemp.

Fig. 171. *Exemp.* III. *Proponatur circulus specularis concavus* MBN, & radiorum OM, ON reflexi sint MF, NG (se decussantes in H, & cum ipsis OM, ON concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum FAG; ejus itidem imago rectis OM, ON interjacebit, puta ad φαγ. comparando jam angulos apparentes FOG, φOγ, clarè vides objecti FAG speciem imminui. item cernis puncta sibi respondentia F, φ, & G, γ ad alias ac alias partes jacere, seu objecti situm hinc inverti. Quòd si intra angulum & spatium XHY statui concipiatur objectum, clarum est hinc ejus quidem speciem ampliari, sed adhuc situm inverti. sin inter ipsa XY consistat objectum, ejus itidem invertetur situs, at quantitas non immutabitur. demùm si intra angulum NHM constituatur objectum, puta RLS; cujus imago sit ρλσ; evidens est hujusce speciem crescere, sitúmque retineri.

Fig. 172. *Exemp.* IV. *Proponatur circulus Specularis convexus* MBN; factísque similiter ac in eo quod immediatè præcessit omnibus; ne plura prodigam verba, vides objecti FAG speciem (φαγ) coarctari, sed ejusce positionem eandem persistere.

Fig. 173. *Exemp.* V. *Proponatur lens aliqua (exempli gratiâ, lens plano-convexa)* MBNQP. Radii OM, ON ad superficiem MBN refringantur in MP, NQ; tum ipsi MP, NQ ad superficiem PQ refringantur in ipsos PF, QG (sese decussantes in H, & cum ipsis OM, ON concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, si objectum FAG infra XY (versus H) statuatur, ipsum ab imagine φαγ majus, quàm obtutu simplice, repræsentari. Quòd si inter ipsa puncta X, Y subintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at si supra XY statuatur objectum RLS, ejus species, ad ρλσ conspicua, diminuetur; ubique verò punctorum correspondentium positio directa permanebit.

Fig. 174. In altera verò figura (ubi refracti PF, QG versus axem procurrentes convergunt) cùm objectum FAG citra punctum H sumitur, vides ejus speciem quantitate adauctam, at situ non mutatam. verùm objecti RLS ultra concursum H positi imago ρλσ nedum prototypo major est, at quoad situm etiam eidem inversa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi positione, objecti speciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inversam; subinde propiùs adducit, nonnunquam longiùs amovet. Singulos casus ad examen facilè rediges hoc ad specimen aciem mentis intendendo. Quinimò

Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo plerasque superficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, positiones, distantias, figuras respiciunt) compluriúmque *Phænomenων* causas ipse statim operâ levi deprehendes; quibus in expressiùs deducendis libri plures ad tantam molem extumescere vel possunt, vel solent; ut mihi saltem opus non sit hujusmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla succurrunt animadversione non indigna, de magnitudinum etiam apparentiis, tam *Dioptricis* quàm *Catoptricis*, specialia quædam proponam; ea verò commodiùs sequentem præstolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta sit, aliquatenus explendæ *Problemation* hoc adnectam:

Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum F G, ab oculi, circulique refringentis axe A B O bisectum; datúsque sit angulus simpliciter (oculo nempe nudo) apparens F O G. item assignetur punctum Z, quod imago sit puncti A à circulo refringente facta; datus sit denuò ex refractione apparens angulus P O Q; propositum est circulum istum refringentem describere (vel determinare). Fig. 175.

Analysis. Factum esto; sit nempe circulus B N, qualis requiritur, cujus sit centrum C, vertex B; & qui rectam O P in N secet. ducatur C Y ad O F parallela, rectæque O P occurrens in Y, & connectatur C N. cùm itaque sit N Y refractus radii ad F O, vel C Y paralleli; erit C Y . Y N :: R . I . ergò ratio C Y ad Y N datur; & cùm prætereà angulus Y (dato F O P æqualis) detur, etiam (in triangulo C Y N) angulus C N Y innotescet. itaque triangulum C O N specie datur; unde ratio C O ad C N (vel C B) datur. est autem C B . C Z :: I — R . R ergò ratio C B ad C Z datur. itaque ratio C O ad C Z quoque datur; unde ratio C O ad O Z datur. verùm O Z datur; ergò etiam C O datur. hinc demùm & ipsa C B datur.

Componitur autem in hunc modum. In O F utcunque capiatur O ς, & fiat O ς . O σ :: R . I . & connectatur σ ς ζ; ducatúrque Z R S ad ζ σ parallela. tum fiat O Z . Z T :: I — R . R (unde componendo O T . Z T :: I . R) item $V = \sqrt{ZT \times ZS}$; & $X = \sqrt{OZq - Vq}$; tum X . O Z :: O Z . Y. denique X . Y :: O Z . O C (unde erit X q . O Z q :: O Z . O C; hoc est O Z q — V q . O Z q :: O Z . O C; hoc est O Z q — Z T × Z S . O Z q :: O Z . O C). per C verò ducatur C N ad Z S parallela, secans O P in N. denique centro C per N ducatur circulus B N; is proposito satisfacit.

Nam ob $OZq - ZT \times ZS . OZq :: OZ . OC$, erit OZ cub $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$. transponendóque $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$ cub. atqui propter $OZ . ZS :: OC . CN$. eſt $OZ \times CN = ZS \times OC$. quare $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$ cub; adeóque (elidendo OZ) erit $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$. vel $CN . OC - OZ :: OZ . ZT$; hoc eſt $CB . CZ :: OT . ZT$. & componendo $BZ . CZ :: OT . ZT :: I . R$. itaque primò liquet punctum Z imaginem eſſe puncti A, ex refractione factam ad circulum BN. quinetiam ob $CY . YN :: \rho O . O\sigma :: R . I$; palàm eſt NO refractum eſſe radii ad CY, hoc eſt ad FO paralleli. liquidò proinde conſtat propoſitum. ||

In hoc caſu debet eſſe $OZq \sqsubset ZT \times ZS$. Haud abſimili ratione quoad alios caſus (ut ſi circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego ſpecimen tantùm *inſtitui Problematis*, juxta quod viſibilis objecti ſpecies per refractionem circularem ſecundum præſtitutas quantitatem atque diſtantiam utcunque poſſit immutari. ||

APPENDICULA.

UT hæc paullò ſtrigoſior Lectio nonnihil incraſſetur, faciam hîc (quanquam alienore loco) quod alibi (ſi mihi tunc in mentem veniſſet) factum oportebat; raciociniis noſtris adverſantem, à viro doctiſſimo (alioquin opinor raró dormitante) commiſſum paralogiſmum, nè cui fraudi ſit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam noſtram confirmabo. horſum è præmiſſis conſequens, ſed & experientiæ (ut videbimus) conſonum hoc præſterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehenſum objectum (puta lucidum punctum A) reverà duplum apparet, ſeu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176. Nam à puncto A exeuntes inflectenti MN incidant duo quicunque radii AM, AN; quorum inflexi ſint ME, NF; concurrentes in X; in his autem uſpiam conſtituantur oculorum centra O, P. quòd puncti A imago nulla ad occurſum X exiſtat, è ſupra poſitis, ac probatis conſectatur (omnes enim imagines ad illa conſiſtere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi interſecant) itaque duæ ſunt imagines puncti A, una in inflexo EM (qualis α) ad oculum O pertinens; altera in inflexo FN (qualis *a*) oculo P deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujuſvis hoc modo ſpectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; regero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines istæ duæ (quales α, a) ita sibimet ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibilitèr coalescant; ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secùs apparet; id quod cùm è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species α, a; quarum illa (α) clauso oculo O, hæc (a) clauso P disparebit. Fig. 177, 178.

Notetur autem, si placet, imaginum α, a intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magìs, nunc minùs deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducatúrque F G ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam F E minor est quàm F G, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus L G; in hoc itaque jam consistet imago α, ab altera a magìs elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certè quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propiùs admotam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem φ α γ; rursus (oculo O occluso) altero P conspicies imaginem fag, à priore φ α γ aliquantùm deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicies, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutrà. Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quàm uno; speciebus ità coëuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam prætereà subdemus instantiam: Per sphæram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N translucentem lucernulæ flammam A specta; ejus duas imagines α, a observabis (pro oculorum situ magìs à se minúsve dissitas) quarum una (α) clauso oculo O, altera (a) clauso P evanescet. Fig. 180.

Videtur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut *Keplerus* alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret. *Paralipom. pag.* 178.

Has

Has instantias, facilitatis gratiâ, ità proposuimus, quasi punctum A, una cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrùm in experiendo præcisè contingat nécne, parùm refert; duas utcunque species apparere liquet. quin facilè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus, ψευδογράφημα; *In Dioptr.* quo nempe *P. Herigonius* propositionem hanc suam comprobatum it: "Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis sè mutuo contingen-"tibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per "punctum refractionis directè producti.

Fig. 181. Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D conveniant in C; sit autem superficiei refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ità demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiei refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cùm puncta A, B sunt in superficie coni recti, cujus axis est recta F G. quòd si prior casus ponatur, è suprà demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeóque in harum concursu; concursus autem iste non est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicam oculo utrique imaginem apparere; quod πρῶτον ψεῦδος erat, à nobis paullò supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opinor, ratiocinium illud satis enervant. ||

Lect.

Lect. XVI.

I. *Punctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis*, conquiescere possem; siquidem exinde magnitudinum apparentiæ deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines designando. cæterùm nè justo parciùs in hac parte, vel illiberaliùs egisse videar, etiam *de rectarum linearum (consequenter & planarum superficierum, quibus distinctè visui repræsentandis natura præcipuè consuluisse videtur) apparentiis & imaginibus expressiora specimina quædam haud gravabor adnectere*. de quibus etiam circa reliquarum magnitudinum apparentias propius ac promptius fiat judicium.

II. Notetur autem imprimìs; Sicuti (quod sæpiùs in antedictis habetur insinuatum) cujusque puncti quodammodò duplex est imago; una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum simul ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ radiationis, superficiei reflectentis, ipsiúsque visionis axe) altera verò relata, mutabilis, ac minùs præcipua; quæ talis est respectu oculi extra rectam inflectenti superficiei perpendicularem arbitrariè constituti; ità pari fermè modo duplex cujusque magnitudinis imago concipi potest; una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine designabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in objecta congrua superficie vividè deformaretur; qualísque videretur oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam ritè collocato) altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione constitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè multis in decursu proponendis luculenter apparebit.

III. *Super-*

Fig. 182. III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam si placet ac aërem)* repræsentet recta PQ, & aquæ insit recta FP ad PQ perpendicularis. fiat autem FP. XP :: R. I; erit XP imago absoluta rectæ FP; continet illa scilicet omnes locos punctorum, quæ in FP, oculo apparentes in ipsa FP sito. verùm si ponatur oculus uspiam extra FP, velut ad O, ei tota FP citra XP apparebit. transeat videlicet alicujus radii FM refractus per O, & protrahatur OM, ut occurrat ipsi FP in K. est ergò (secundum præmonstrata) punctum K inter X, & P. itidem (è prius ostensis) puncti F imago quæ in refracto OMK, ad oculum O relata, inter K, & M cadit, veluti puta ad φ. simili ratione cujusvis alterius in ipsa FP accepti puncti, ceu R, imago (cogita ς) citra rectam XP, versus oculum, jacet. totius itaque rectæ FP imago talis est, qualem curva linea $\varphi\varsigma$P refert. quòd si PF infinitè protrahatur, ejus totius imago P$\varsigma\varsigma$ versus asymptoton OBA, ad PF parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva P$\varsigma\varphi$ hoc modo*. ab O ducatur utcunque recta OMK secans rectam PQ in M; & (posito fore $S = \sqrt{Rq - Iq}$) sit $PH = \frac{Sq \times PM\,cub}{Iq \times FPq}$; atque per H ducatur H$\varphi$ ad PR parallela, ipsi OK occurrens in φ; erit φ in dicta linea; nempe, si OMK ipsius MF refractus concipiatur, erit punctum φ ipsius F imago, eodem modo reliqua lineæ P$\varsigma\varsigma$ puncta designantur.

Fig. 182. V. Quinetiam adsumptâ rectâ FG ad PQ parallelâ, ductâque GQ ad FP (vel ABO) parallelâ; item per X ductâ XαY ad PQ parallelâ, erit quidem recta XαY rectæ FAG imago absoluta; verùm ejus imago ad oculum O relata citra rectam XY tota jacet, eámque curva $\varphi\alpha\gamma$ repræsentat, admodum jamjam præscriptum punctatim delineabilis. itaque compositæ lineæ PFGQ, circa axem OBA rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vasculi cylindrici aquâ repleti superficiem inspectando.

Fig. 183. VI. Quòd si recta visibilis FG ad PQ inclinata sit, cum ea conveniens in V; & connectatur XV, erit rursus XY ipsius FG imago absoluta; relatam verò curva $\varphi\alpha\gamma$ repræsentat.

Fig 184. VII. Quòd si vicissim *oculus O in aqua ponatur constitutus*, & ab indè respiciatur recta PF in aëre posita, fiatque rursus PF. PX :: R. I;

Fig

fig: 176

fig: 171

fig: 178

fig: 1

fig: 173

fig: 172

Fig

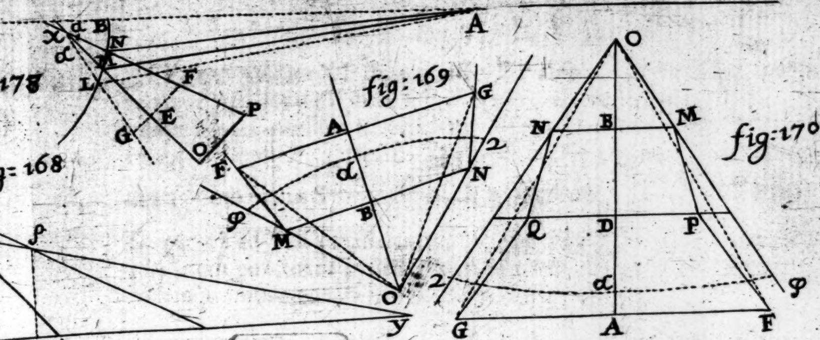
fig: 179

fig: 181

fig: 180

Fig

Fig



y
X
V

fig: 175

185.

fig: 174

fig: 179

Fig



Fig

Fig

Fig

R. I; erit quidem X P imago rectæ F P absoluta; at ejusdem imago relata (puta P ς φ ς) ultra P F R jacet, ab illa sensim reclinans; ejúsque puncta quælibet ità signantur. Ab O ducatur recta O K utcunque rectam P Q secans in M, & sit K M ipsius F M refractus, tum (posito rursus $S = \sqrt{Iq - Rq}$) fiat $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq} PM$, & per H ad P F parallela ducatur H φ, ipsam O M K intersecans ad φ; erit punctum φ in dicta linea, punctum scilicet F repræsentans. eodémque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ F G ad ipsam P Q parallelæ, vel inclinatæ imago relata φ α γ (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris casûs imago videbatur incurvata) determinabitur. rem apposita figura satìs exprimit.

Hæc autem omnia de suprà comprobatis dilucidè consectantur.

IX. Ac ità quidem circa simplices planas superficies refringentes sese res habet. Quòd si corpori parallelis planis M N, μ ν terminato exponatur recta F G; Sint rectæ F P, G Q, A D B O ipsi P Q perpendiculares, & fiat B D . B S : : I . R; adsumatúrque A α = D S; & fiat A B . α ς : : F P . X P; & per X, α ducatur recta X α Y, erit X α Y lineæ F A G imago absoluta. Ergò ejus imago ad oculum O relata (in hoc casu) citra ipsam X α Y versus superficiem μ ν nonnihil incurvata disponetur, qualem exhibet linea φ α γ. id quod ex eo satìs videtur liquere, quòd recta X α Y sit imago respectu oculi in ipsa O B à B infinitè semoti. designari verò poterit hæc imago ad hunc modum. sit *fag* (minusculis elementis indigitata) imago rectæ F A G ad superficiem refringentem μ ν relata (hoc est ad oculos in refractis f μ M, q ν N, a D B, reliquísque, nec non in medio μ ν M N versus O protenso, sitos) juxta proximè commonstrata delineabilis. tum hujus ipsius *fag* velut in medio M N μ ν versus A protensò positæ, ex refractione ad superficiem M N emergens, & ad oculum O relata construatur imago φ α γ (itidem ad modum nuperrimè præscriptum) hæc rectam F A G per corpus M N μ ν spectatam repræsentabit. experientia testis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quàm utiliore supersedeo. Fig. 185.

X. Porrò quod *plana specula* (simplicia, vel composita) attinet, in iis palàm est imagines absolutas ac relatas omnino sibi coincidere; quo fit, ut ex objectorum magnitudines, figuras, distantias (situ

tamen nonnunquam inverso) quàm exactissimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitùs reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186. XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA; in qua sumatur portio quædam AR, fiatque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago absoluta rectæ RA; quòd si CB bisecetur in Z; erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago absoluta; hoc est, illæ tales erunt oculi respectu in ipsa AB constituti. secùs autem uspiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conspicuum est (hoc est quod supra horizontem OT, speculo contiguum extat) supra citráque XB apparebit. Enimvero transeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim ostensum) supra punctum X, versus A, extat. quinetiam (ex indidem monstratis) puncti A imagines omnes, oculum O respicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA versus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta α, in ipsa KM existet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox ostendemus). simili ratione puncti R imago, cogita ρ, supra Y, citráque BY jacet. quòd si porrò per O transeat recta ODLH, quæ reflexa sit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipsa AB infinitè semoti; hæc puta sit ad σ. erit itaque curva $B\rho\alpha\sigma$ imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Ista verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO describatur circulus OTC; & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa sit MA; in qua sumatur ME = MF; tum secetur FM in α, ut sit $F\alpha . \alpha M :: AE . AM$; erit (è pridem demonstratis) punctum α puncti A imago. simili modo quotcunque lineæ $B\alpha\rho\sigma$ puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem sit punctum α citra K (versus oculum) ità constabit. Ducatur FQ ad AM parallela. est ergo angulus FQA par angulo CAM. ast angulus FCA angulo ACE minor est. ergò est $CF . FQ \sqsubset CE . AE$. atqui $CF = CE$; quare $FQ \sqsupset AE$. ergò est $FQ . AM \sqsupset AE . AM$. hoc est $FK . KM \sqsupset F\alpha . \alpha M$. componendóque $FM . KM \sqsupset FM . \alpha M$. unde $KM \sqsubset \alpha M$. adeóque punctum α citra K versus O jacet: Q. E. D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communísque fermè sententia convellitur, quæ rectæ B A rectam B K, infinitæque B S ipsam B L imagines statuit; proindéque corruunt omnia, quæ principio superextruunt isti gratìs adsumpto, rationique dissentaneo. Veruntamen *Opticorum novissimus scriptor, eruditissimúsque vir*, veterum ipse vestigiis insistens postulatum istud ab experientia stabilitum vult, ejúsque veritatem sese deprædicat centies exploràsse; doctrinam itaque nostram invicto sensûs testimonio refutavit. atqui repono, non potuisse illum quantumvis oculatum & sagacem quod obtendit vel semel explorare. nec hoc in casu poterit doctrina nostra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quòd perpendicularis C B A situm exactè dignoscere perquam arduum, forsan impossibile fuerit) quum lineola B $\alpha \varrho \sigma$ infinitam, juxta nos, lineam rectam B S repræsentet, ipsúmque punctum σ (infinitè dissito puncto S respondens, atque rectam DH bisecans) à puncto L modicè distet, quæ amabò visûs acies curvæ B $\alpha \sigma$ à recta B L deflectionem cernat? itaque frustrà esse videtur acutissimus vir, ad testem provocans hac in parte minùs competentem, déque cujus sententia vix ullatenus constare possit. Sanè quoad affinem in *Dioptricis* casum, quem attigimus supra, demisso in aquam perpendiculo, oculo simpliciter inspectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verùm ope reflectionis justum perpendicularis situm observando (qui nudo scilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immersi perpendiculi imago ab ipso deviare. neque dubito quin pariter in præsente casu ritè consulta experientia pro nobis sit pronunciatura. Quinimò nostris ex effatis (luculentâ opinor ratione suffultis) apparebit, unde principium illud multis in casibus experientiæ videatur consentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multùm abscedat; ejúsque proinde falsitatem sensus (nisi ratione, vel certiore sensu adjutus) perspicere nequeat. ast exorbito.

XV. Sit rursus *Speculum concavum* B M D; cujus centrum C, & per C extendatur infinita recta C B L, bisecetúrque semidiameter C B in Z; ac in Z B sumptis quibuscunque punctis A, R; fiat C A. A B :: C X. X B; itémque C R. R B :: C Y. Y B; erit quidem infinita B L totius B Z imago absoluta, & portio Y X portionis R A; verùm extra axem B C uspiam constituto visu, velut ad O, ad hunc relatæ ipsius Z B, ejúsque partium imagines ità determinantur. Fig. 187.

Fig. 187. XVI. Ad diametrum CO describatur circulus CFH; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit DS, contingat fore DS $= \frac{1}{2}$ DH, vel $\frac{1}{2}$ DI; positâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facilè duci posse concipiatur; & per curvam appropriatam reverà statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta σ, à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, nisi Hσ, σD sint infinitæ) est Hσ.σD :: IS. SD. Jam in arcum DB cadat utcunque radius OM, cujus reflexus sit MAE; & in hac sumatur ME = MF; tum in OM producta capiatur punctum α, ut sit Fα.αM :: EA.AM; erit α puncti A imago. simili methodo reperiatur ϱ puncti R imago; neque non reliqua totius B$\varrho\alpha\sigma$, ipsam BS referentis, puncta.

Fig. 187, 188. XVII. In hanc verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd CS ⊏ CZ. Nam 4CZq = CBq = 3SDq + CSq ergò quum sit CZ ⊏ SD; erit CS ⊏ CZ.

2. Quòd CA ⊏ CS. Nam (è suprà monstratis) si ducatur recta Mψ ad DO parallela, ejusce reflexa (puta Mξ) secabit ipsam DS, versus I, puta ad ξ. ergò Mξ ipsam CB secabit supra punctum S, velut ad φ. atqui quoniam ang. CMO ⊏ CMψ, seu ang. CMA ⊏ CMφ, est CA ⊏ Cφ; adeóque magis est CA ⊏ CS.

3. Quòd EA ⊏ AM. cùm enim sit EM (vel FM) ⊏ HD, atque DS ⊏ MA; erit EM.MA ⊏ FD.DS :: 2.1.

4. Hinc denuò liquebit totam lineam B$\varrho\alpha\sigma$ ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela est hìc ang FCA ⊏ ang ACE. & ang FQA = ang CAE. quapropter erit CF.FQ ⊐ CE.AE. adeóque FQ ⊏ AE. ac indè FQ.AM ⊏ AE. AM; hoc est FK.KM ⊏ Fα.αM. dividendóque FM.KM ⊏ FM.αM. quare αM ⊏ KM. adeóque punctum α ultra K in recta OK protensa jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ OD ducatur radius ON cujus reflexus NGT = NV; sitque TG.GN ⊐ 2.1; statuenda est puncti G imago (puta γ) ad partes O. quinimò cùm in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantùm instituens (quippe cùm operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosiùs prosequi) à minutiis abstineo. quò & indè pronior sum, quoniam in hac re copiosus videtur *A. Tacquetus*; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo

sugge-

ſuggerens haud aſpernanda . relinquantur igitur ei cætera , mihi ſuffecerit , quòd veriorem *Phænomena* detegendi declarandíque methodum adniſus ſim aliquatenus enucleare . pergamus ad alios caſus, haud ità pertractatos.

XIX Objiciatur ſpeculo M B N D recta F A G, rectæ C A (per ſpeculi centrum C tranſeunti) perpendicularis ; adverto, ſi fuerit ipſa C A major quàm C Z , quadrans diametri B D, quòd rectæ F A G ad infinitum utrinque protractæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas ſimul ac convexas) imago abſoluta (quinetiam imago ad oculum in ipſo centro C conſtitutum relata) erit *Ellipſis*. item ſi C A minor ſit, quàm C Z , quòd ipſius F A G imago abſoluta (vel dicto modo relata) conſtabit ex hyperbolis oppoſitis ; ſi denuò C A ipſam C Z adæquet (vel F G per ipſum Z tranſeat) quòd ad parabolam ejuſmodi conſiſtet imago. Sed modum tranſgrederer hæc jam aggrediens demonſtrare. Expectent igitur. || Fig. 189.

LECT. XVII.

I. AD ea , quæ ſub finitam præcedentem propoſuimus demonſtranda *neceſſariam*, *alioquin notabilem*, *Conicarum Sectionum proprietatem* imprimìs oſtendemus.

Sit triangulum A C E , rectum habens angulum ad C ; & indefinitè protractis lateribus A C, A E, in A C ſumatur quod piam punctum X, ducatúrque X G ad C E parallela ; inſeratur autem angulo C X G recta C Z æqualis ipſi X G ; dico punctum indeterminatum Z ad ſectionum conicarum aliquam conſiſtere. Fig. 190.

II. Nempe primò , ſit angulus A ſemirecto minor (vel A C ⊏ C E) erit punctum Z ad ellipſin , quæ determinatur hoc pacto : Anguli L C P ſemirecti fiant (ad utramque rectæ C E partem) liquet igitur rectas C P ipſi A E occurrere , puta ad puncta R, & S . ab his

ad

ad ipsam EC parallelæ ducantur rectæ RT, SV; palàm est indeterminatum punctum X inter limites T, V consistere (nam extra TV punctum quodlibet L accipiendo, & indè ducendo LIP ad CE parallelam, erit CL, hoc est LP, major quàm LI, unde à C ad rectam LI, nulla duci recta potest æqualis ipsi LI). Jam autem dico, quòd punctum Z ad ellipsin existit, cujus axis TV, focus C. Nam bisecetur TV in K; fiat $VD = TC$; ducatur KH ad CE parallela; per H ducatur HN ad CK parallela. Estque $KH = \frac{TR + VS}{2} = \frac{CT + CV}{2} = KT = KV$. Et quoniam $AV . AT :: (VS . TR$ (hoc est) $:: CV . CT ::) CV . DV$; erit per rationis conversionem $AV . TV :: CV . CD$. vel, consequentes subduplando, $AV . KV :: CV . CK$. dividendóque $AK . KV :: KV . CK$; hoc est $AK . KH :: KH . CK$. hoc est $HN . NG :: KH . CK$. quare $KH \times NG = CK \times HN = CK \times KX$. atqui est $CZq = XGq = KHq + NGq + 2\,KH \times NG$. & $CXq = CKq + KXq + 2\,CK \times KX = CKq + KXq + 2\,KH \times NG$. ergò $KHq + NGq - CKq - KXq = CZq - CXq = XZq$. Ad alteras bisegmenti K partes sumatur $K\xi = KX$, ducatúrque $\xi\nu$ ad KH parallela, secans curvam $TEZV$ in ζ, & rectam AH in γ, ac ipsam NH in ν; erit quoque, simili ex discursu, $\xi\zeta q = KHq + \nu\gamma q - CKq - K\xi q$; unde liquet fore $\xi\zeta = XZ$; connexísque proinde rectis $C\zeta$, $D\zeta$, erit $D\zeta = CZ$; & $C\zeta + CZ = \xi\gamma + XG = 2\,KH = TV$. ergò $C\zeta + D\zeta$ (vel $DZ + CZ$) $= TV$. unde perspicitur *curvam* $T\zeta ZV$ *esse ellipsin*, cujus *axis* TV; *foci* C, D.

Fig. 191. III. Sit autem secundò angulus CAE major semirecto (vel $AC \sqsupset CE$) dico punctum Z ad oppositas hyperbolas, consimili modo determinabiles, existere. enimverò factis (ad utramque rectæ CA partem) angulis semirectis ACP; & (ab ipsarum CP cum AE occursibus) ductis rectis RT, SV ad CE parallelis, punctum X extra limites TV necessariò consistet (etenim ubivis intra TV ductâ LIP ad CE parallelâ, erit $LI \sqsupset LP$, ideóque nulla par ipsi LI angulo ALI subtendi potest; id quod extra terminos hosce nil prohibet fieri) erit jam TV axis, & C focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in casu præcedente; eritque rursus hìc $KH = KV$. item ob $AV . AT :: CV . DV$; & (inversè componendo)

AV.

$AV.TV::CV.CD$; & consequentes subduplando, dividendóque $AK.KV::KV.KD::KV.CK$. vel $AK.KH::KH.CK$; hoc est $HN\ (KX).NG::KH.CK$; quare $CK \times KX = KH \times NG$. est autem $XZq = CZq - CXq = XGq - CXq = NGq + KHq - 2NG \times KH: - KXq - CKq + 2CK \times KX = NGq + KHq - KXq - CKq$. Sumatur $K\xi = KX$, discursúmque similem adhibendo liquebit fore $\xi\zeta = XZ$; & ideò $D\zeta = CZ$. unde $C\zeta - D\zeta\ (DZ - CZ) = C\zeta - CZ = \xi\gamma - XG = 2KH = TV$. quare manifestum est *curvas* TZ, $V\zeta$ esse *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

IV. Tertiò demùm, sit angulus CAE semirectus (vel $CA = CE$) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ itidem ita determinatur. Fiat angulus ACP semirectus, & ab ipsarum AE, CP intersectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C *Focus Parabolæ*. id quod ex bene nota sectionis hujus proprietate constat; qua scilicet est $TA = TR = TC$ (ob angulos TAR, TCR semirectos) & $AX = XG = CZ$. Fig. 192.

V. Manifestum est verò rectam AE sectiones has ad E contingere. quia nempe perpetuò major est CZ (vel XG) ordinatâ XZ; adeóque puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc est tota AG extra illas cadit.

VI. Hisce præstratis: *Esto Circulare speculum* $MBND$, centrum habens C; cui exponatur recta quæpiam $F\alpha G$; & huic perpendicularis sit recta $C\alpha$; quam ad partes aversas sumpta CA, adæquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis quadranti diametri BD; connexáque recta AE producatur utcunque. sumpto jam in recta $F\alpha G$ puncto quolibet F, connectatur FC, & radiationis ab F in ipsa FC limes, seu *focus*, sit Z; ac per Z ducatur ZX ad AC perpendicularis, ipsi AE occurrens in H; dico fore XH parem ipsi CZ. Fig. 193.

Nam (è jam antè monstratis) est $FC.CZ::FM.MZ$ (hoc est) $::FC - CB.CB - CZ$. hinc erit $\alpha C.CX\ (AC.CX)::FC - CB:CB - CZ$. quare (ducendo in se extrema, ac media) erit $AC \times CB - AC \times CZ = CX \times FC - CX \times CB$. hoc est (ipsi $CX \times FC$ substituendo $AC \times CZ$, propter $\alpha C.CX::FC.CZ$) erit $AC \times CB - AC \times CZ = AC \times CZ - CX \times CB$. transponendóque $AC \times CB + CX \times CB = 2AC \times CZ$.

hoc

hoc est $AX \times CB = 2 AC \times CZ$; vel $2 AX \times CE = 2 AC \times CZ$; unde $AX . AC :: CZ . CE$; hoc est $XH . CE :: CZ . CE$. quapropter est $XH = CZ$: Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus. examinetis ipsi, peto.

Fig. 193, 194, 195. VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit $CA \sqsubset CE$; quòd omnes punctorum F limites, seu foci (quales Z) ad ellipsin existunt; cujus *focus* C, & cujus *axis* TV è præmissis, non uno modo, determinatur. item si $CA = CE$, limites Z ad parabolam consistent cujus *focus* C, *axis* $CT = \frac{1}{2} CE$, *vertex* T. denuò, si $CA \sqsupset CB$, puncta Z ad *hyperbolas esse constat*, quarum itidem *focus* C; & *axis* TV facilè de modò (vel alibi) dictis reperitur; cunctarum verò sectionum *Parameter* ipsi CB æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi *sectiones conicæ* sunt rectarum $F\alpha G$ absolutæ imagines; quin & eædem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constitutum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

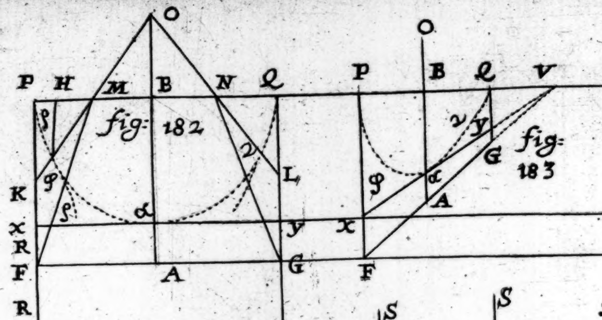
IX. Patet autem si recta $F\alpha G$ infinitè distet, quòd *ellipsis* in *circulum* abit. utì quoque si $F\alpha G$ per centrum transeat, quòd *hyperbolæ* istæ in rectam lineam degenerant.

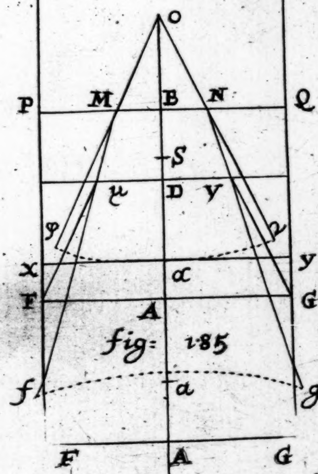
X. Subnotetur etiam in casu quum *imago sit hyperbolica*, quod *hyperbolæ* YTY pars YEEY, neque non tota $\zeta V \zeta$ ad circuli partes MBN pertinent; (nempe si centro C per E descriptus circulus ipsam FG intersecet punctis K, tota hyperbola $\zeta V \zeta$ rectam interceptam KK referet; & hyperbolicæ lineæ alterius pars superior YEEY quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensæ rectæ FG) pars autem ETE ad partem concavam MDN spectat. id quod suffecerit admonitum.

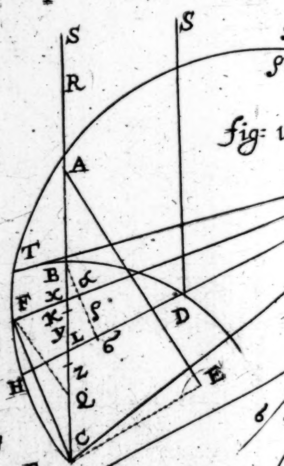
Fig. 196. XI. Et hæc quidem de rectæ FAG imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicum fiet. sit, instantiæ loco, oculus O, ad quem (convexis è partibus) ab F, & G reflectantur OMK, ONL; & sit ellipsis ZVYT absoluta (qualem modò definivimus) rectæ FAG imago, quam ductæ FC, GC punctis Z, Y secent. itaque punctorum F, G imagines ad O relatæ (puta φ, & γ) extra ellipsin

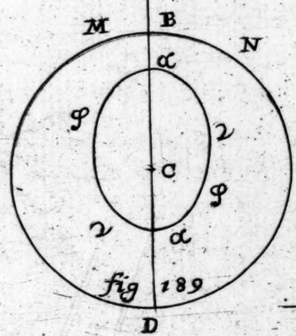
12

Fig. 194,









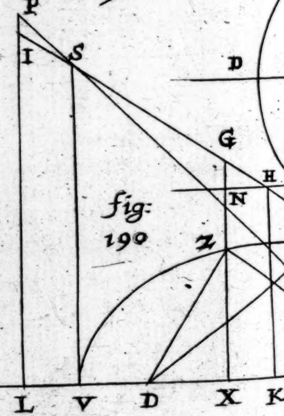
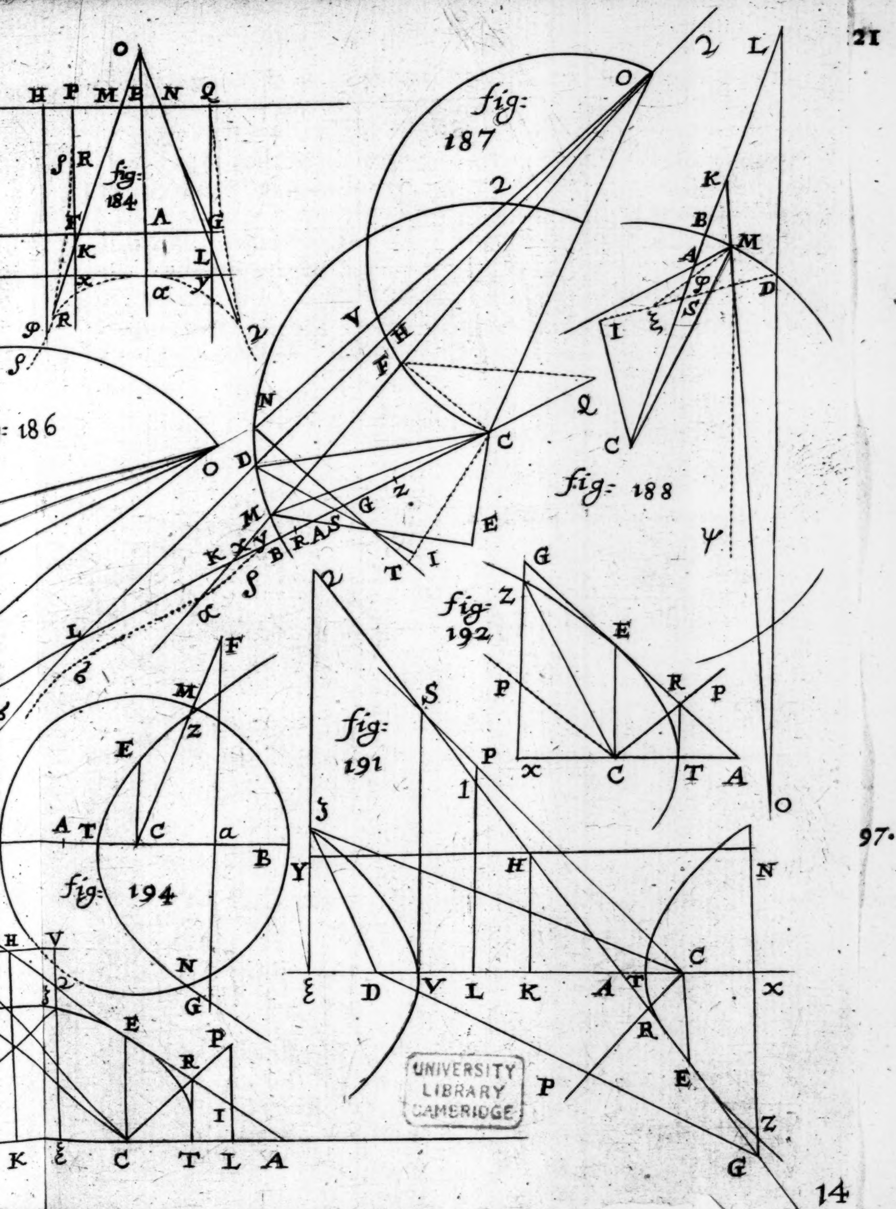


Fig.



97.

14

Fig. 194.

Fig.

ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum φ inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum γ inter O, & L cadunt. imaginis itaque φ α γ figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad cæteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam è præmissis luculentè constat quo pacto linea φ α γ præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda; postquam tamen paullùm respiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiúmque demonstrandis istis impensum respectando, satis fortasse multa videor tradidisse. ||

LECT. XVIII.

I. P*Ropositum est jam nobis recta linea ex refractione prognatas ad circulum imagines designare*; nempe primùm absolutas; quorsum hoc spectat *Theorema*:

In circulum (e.g. medii densioris) refractivum M B N D radiet recta F A G; huic verò perpendicularis sit recta C A (circuli centrum C permeans) tum in recta F G sumpto liberè puncto F ducatur recta F C; & in hac sit punctum Z limes (qualem anteà fiximus) radiationis à puncto F; sit autem Z X ad A C normalis. porrò fiat C A . C R :: I . R; & A R . C B :: C R . C E (ponatur autem C E ad X Z parallela) tum connexa R E cum ipsa X Z conveniat in H. dico fore X H = C Z. Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est F C × M Z . F M × C Z :: I . R :: C A . C R. hoc est F C × C M + F C × C Z . F C × C Z − C M × C Z :: C A . C R. quare (ducendo in se extrema, mediáque) est F C × C M × C R + F C × C Z × C R = F C × C Z × C A − C M × C Z × C A = F C × C Z × C A − C M × F C × C X (quoniam scilicet est

R CZ.

CZ.FC::CX.CA; adeóque $CZ \times CA = FC \times CX$). quapropter (elidendo FC) est $CM \times CR + CZ \times CR = CZ \times CA - CM \times CX$; transponendóque $CM \times CR + CM \times CX = CZ \times CA - CZ \times CR$. hoc est $CM \times RX = CZ \times AR$. quare (ad analogismum redigendo) est AR.CM::RX.CZ. hoc est CR.CE::RX.CZ. hoc est RX.XH::RX.CZ; unde $XH = CZ$: Quod E.D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *sectiones conicas* nuperrimè sunt ostensa) liquidò consectatur, si CR major fuerit quàm CE (vel quod eódem recidit, AR major quam CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines absolutæ (quales Z) ad *ellipsin* consistent, cujus *Focus* C, cujúsque penitus determinandæ modum satìs facilem tunc ostendimus. item si $CR = CE$, quòd imagines istæ ad parabolam erunt; & denique, si $CR \sqsupset CE$, quòd eædem in hyperbolis oppositis reperientur; quarum etiam sectionum focus communis est punctum C, & quarum axes designandi modum reliquáque circa ipsas præsertim advertenda declaravimus. (Nempe, si rectæ CP cum ipsa CA semirectos constituant angulos; & hæ rectam RE intersecent ad puncta S, indéque demittantur ad AC perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, rectáque CE semi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protensæ absolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C positum refertur) aliquam esse dictarum conicarum, pro suo peculiari situ hanc vel illam respectivè.

Fig. 198. III. Adnotari porrò debet in isto casu, *sectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL spectare; sicuti postica EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbolæ* ETE pars (infra ECE) YEEY ad partem circuli convexam referri debent. (nempe si centro C, intervallo CE descriptus circulus rectam FG secet punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræsentabit, ipsiúsque FG quod reliquum est hinc indè protensum pars YEEY referet) pars autem superior ETE ad cavam circuli partem LDL spectat. || Semper autem (cùm hìc, tum ubique) intelligatur ad utrasque propositi circuli partes ejusdem generis refractionem effici, seu ejusdem speciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura construenda adhibuit,

buit, solertia quadantenus elucescere videatur, seu ratio quædam assignari possit, cur oculi fundus *Sphæroidicam* (aut ab hac non multùm abludentem) nacta sit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè distantium (quibus in distinctiùs apprehendendis potissimus versatur usus) excipiendis simulachris est accommodatissima. Sed hoc παρενθετικῶς.

V. In reliquis refractionum casibus paria fermè contingunt, quos ideò tacitus præterlabi possem; at minuendo vestro labori, seu quò clariùs & promptiùs de iis constet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N objiciatur recta F A G, cui normalis C A; sitque punctum Z puncti cujusvis F, in F G sumpti, imago absoluta; & Z X ad C A perpendicularis; ac $CA . CR :: I . R$; & $RA . CB :: RC . CE$; & ipsi R E connexæ occurrat X Z protracta ad H; eritque rursus $XH = CZ$. Fig. 199.

Nam est $CA . CR :: (FC \times MZ . FM \times CZ ::) FC \times CZ - FC \times CM . FC \times CZ - CM \times CZ$. quare $CR \times FC \times CZ - CR \times FC \times CM = CA \times FC \times CZ - CA \times CM \times CZ = CA \times FC \times CZ - FC \times CM \times CX$. ac indè $CR \times CZ - CR \times CM = CA \times CZ - CM \times CX$. transponendóque $CR \times CZ - CA \times CZ = CR \times CM - CX \times CM$; hoc est $RX . CZ :: AR . CM :: RC . CE :: RX . XH$. quapropter est $CZ = XH$.

VI. Hinc dilucidè rursus apparet rectæ F A G imaginem absolutam (vel ad oculum in centro C situm relatam) si $RC \sqsubset CE$, *ellipticam* fore; sin $RC = CE$, fore *parabolicam* (quarum sectionum pars anterior E T E ad convexam circuli refringentis partem M B N pertinet, posterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd si fuerit $RC \sqsupset RE$, ejus *imago hyperbolica erit*; & quidem *hyperbolæ* Y T Y pars superior E T E ad circuli partem N B N referenda est; pars autem inferior Y E E Y unà cum tota hyperbola ζ V ζ ad partes concavas L D L pertinebit. nempe si fuerint rectæ C K æquales ipsi C E, tota hyperbola ζ V ζ interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejúsque quod hinc indè protensum superest ab ipsa Y E E Y repræsentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hosce casus animadvertere licet posse sectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diversos circulos

concentricos expositis repræsentandis inservire. nimirum in casu postremo, si reliquis stantibus punctum A indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ ζυζ, YTY rectas FAG repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri CB ipsis AI singulæ respectivæ singulis æquantur, modò semper intelligatur esse CA. CR :: I. R. id quod satis fuerit obiter admonuisse.

VIII. Ut & illud cursim innuisse suffecerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ità vicissim *conicæ sectiones* à rectis lineis ex justa congruos ad circulos inflectione repræsentantur; quos utique non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *datâ conicâ sectione* circulus & recta facilè designantur, ita ut conica rectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco C ad axem CV applicetur normalis CE; & recta ER sectionem tangat ad E; factòque CR. CA :: R. I; ducatur per A recta AI ad CE parallela; sitque CB = AI; tum centro C per B ducatur circulus MBN, peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet eæ saltem unum (in recta per oculi, circulique refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua vero respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris, & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quàm verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum O refringantur ab F, & G radii FMO, GNO; sit autem *ellipsis* TZVY rectæ FG absoluta imago, quam connexæ FC, GC punctis Z, Y secent (ità quidem ut Z sit puncti F, & Y puncti G imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum K supra Z versus C existere; quinetiam puncti F in recta MO imaginem (puta φ) ultra FZ jacere. Similiter puncti G imago (γ) supra Y, ultràque GY sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis φαγ positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in apposita exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimiâ molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari.

Fig. 201.

XI. Ità

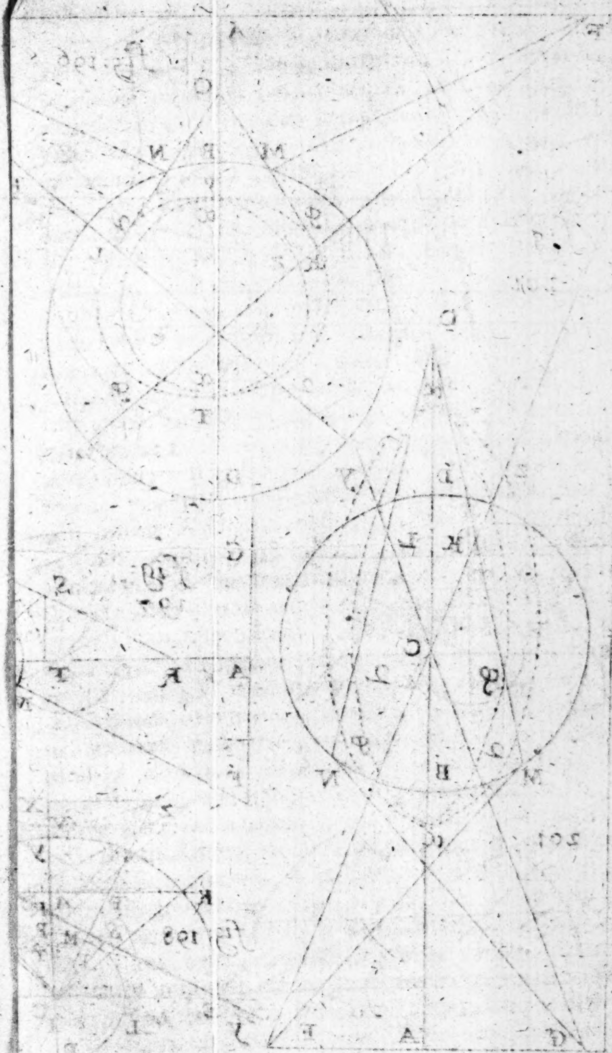
XI. Ità rectarum linearum ad ſphæricam ſuperficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire. unde de planarum quoque ſuperficierum ad eandem repræſentationibus haud difficilè ſtatuetur; harum ſcilicet imagines abſolutæ *conoidum aut Sphæroidum Superficies erunt* è rectarum imaginibus reſpectivis circa radiationum axes converſis progenitæ; quin & relatæ quoque planarum ſuperficierum imagines è rectarum imaginibus relatis ſimili pacto progenerantur. rem totam ipſi mentem aliquantillum advertentes perſpicietis; me λεπτολογίας extremæ faſtidium capit.

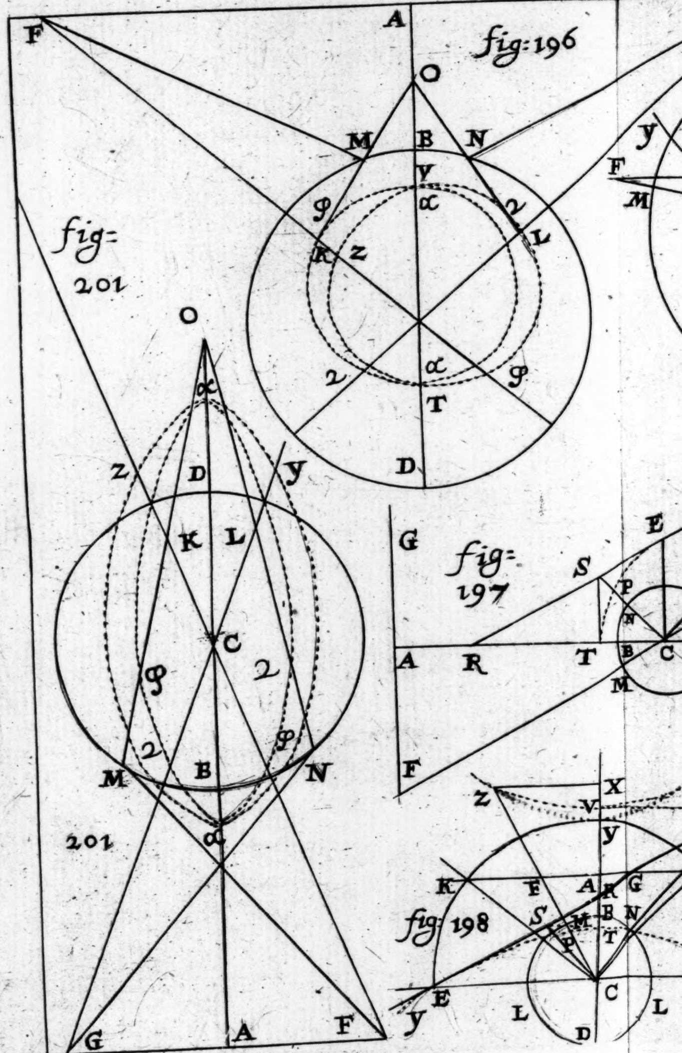
XII. Reſtare videtur, ut quomodò compoſitæ ſuperficies ſphæricæ objectas repræſentant lineas diſpiciamus. verùm cùm imagines indè prognatæ ſint altioris gradûs lineæ, ab uſu notitiâque communi ſegregatæ, atque proprietatibus intricatis præditæ; nil aliud quàm operam luderem iis deſudans extricandis. illas itaque tranſiliam; hoc commonens unicum, punctorum in illis aliquot principalium poſitiones è præmonſtratis dignoſci, de cæteris commodiùs ex conjectura dijudicari.

XIII Hæc ſunt, quæ circa partem *Optica* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi ſuggeſſit meditatio. circa reliquas (quæ φυσικώτερα ſunt, adeóqve ſæpiuſculè pro certis principiis plauſibiles conjecturas venditare neceſſum habent) nihil ferè quicquam admodum veriſimile ſuccurrit, à pervulgatis (ab iis, inquam, quæ *Keplerus*, *Scheinerus*, *Carteſius*, & poſt illos alii tradiderunt) alienum aut diverſum. atqui tacere malo, quàm toties oblatam cramben reponere. proinde receptui cano; nec ità tamen ut prorſus diſcedam, antequam improbam quandam difficultatem (pro ſinceritate quam & vobis & veritati debeo minimè diſſimulandam) in medium protulero, quæ doctrinæ noſtræ, hactenus inculcatæ, ſe objicit adverſam, ab ea ſaltem nullam admittit ſolutionem. illa, breviter, talis eſt: *Lenti vel ſpeculo cavo* EBF exponatur viſibile punctum A, ità diſtans, ut radii ab A Fig. 202, 203, manantes ex inflectione verſus axem AB cogantur; ſitque radiationis limes (ſeu puncti A imago, qualem ſupra paſſim ſtatuimus) punctum Z; inter hoc autem & inflectentis verticem B uſpiam poſitus concipiatur oculus. quæri jam poteſt, ubi loci debeat punctum A apparere. retrorſum ad punctum Z videri natura non fert (cùm omnis impreſſio ſenſum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamat. noſtris autem è placitis conſequi videtur ipſum, ad partes anticas

ticas apparens, ab intervallo longissimè dissito, (quod & maximum sensibile quodvis intervallum quodammodò exsuperet) apparere. cùm enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (seclusis utique prænotionibus, & præjudiciis) longiùs abesse sentiatur; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotissimè positum æstimetur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magìs, si fieri posset, quoad apparentiam elongetur. quin & circa casum hunc generatim inquiri possit, quidnam omninò sit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciatque quòd constanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hactenus dictorum *Analogia* responderi posse videtur, nisi debere punctum A perpetuò longissimè semotum videri. Verùm experientia secùs attestatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z positione variè distans; nunquam ferè (si unquam) longinquius ipso A liberè spectato, subindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quò oculum appellentes radii magìs convergunt eò speciem objecti propiùs accedere. nempe, si puncto B admoveatur *oculus*, suo (ad lentem) ferè nativo in loco conspicitur punctum A (vel æquè distans, ad *speculum*;) ad O reductus oculus ejusce speciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipsum existimat; ac ità sensim, donec alicubi tandem, velut ad Q, constituto oculo objectum summè propinquum apparens in meram confusionem incipiat evanescere. quæ sanè cuncta rationibus atque decretis nostris repugnare videntur, aut cum iis saltem parùm amicè conspirant. Neque nostram tantùm sententiam pulsat hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimìs ac vulgatam, nostræ præ reliquis affinem ità convellere videtur, ut ejus vi coactus doctissimus *A. Tacquetus* isti principio (cui penè soli totam inædificaverat *Catoptricam* suam) ceu infido ac inconstanti renunciârit, adeoque suam ipse doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè facturus, si rem totam inspexisset penitiùs, atque difficultatis fundum attigisset. Apud me verò non ità pollet hæc, nec eoùsque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifestè rationi consentanea video, discedam; præsertim quum ut hîc accidit, ejusmodi difficultas in singularis cujuspiam casûs disparitate fundetur. nimirum in præsente casu peculiare quiddam, naturæ subtilitati involutum, delitescit, ægrè fortasis, nisi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hactenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè satisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, resolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi, Valeatis.*

FINIS.




fig: 196
fig: 201
201
fig: 197
fig: 198

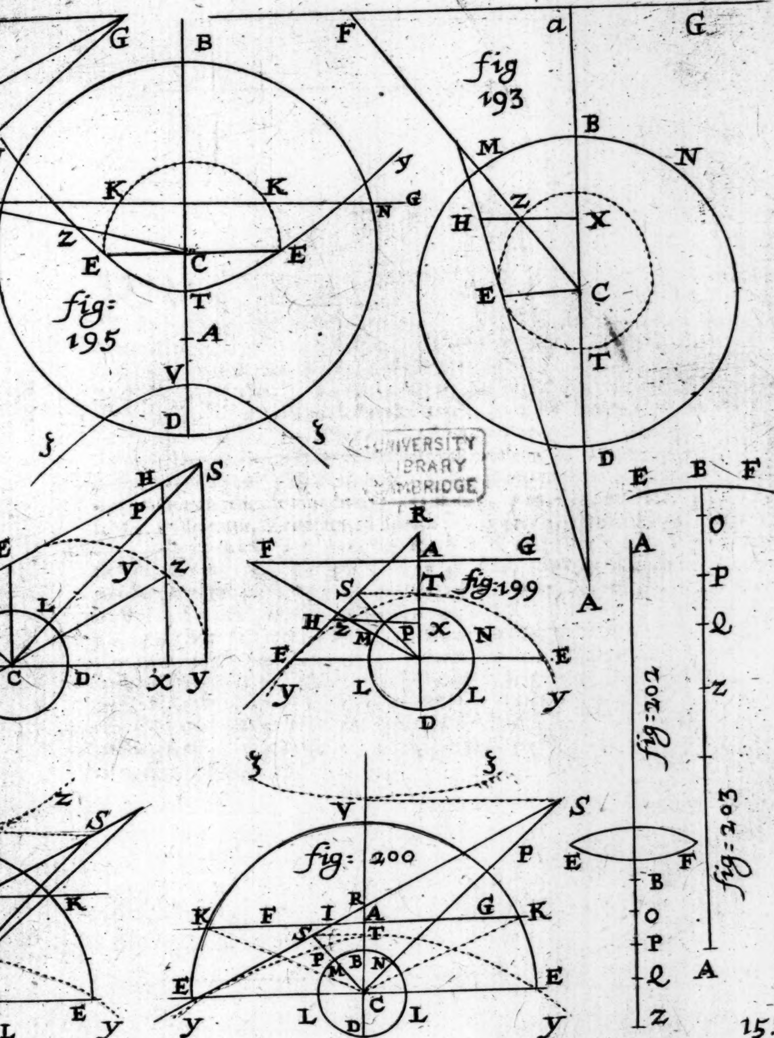
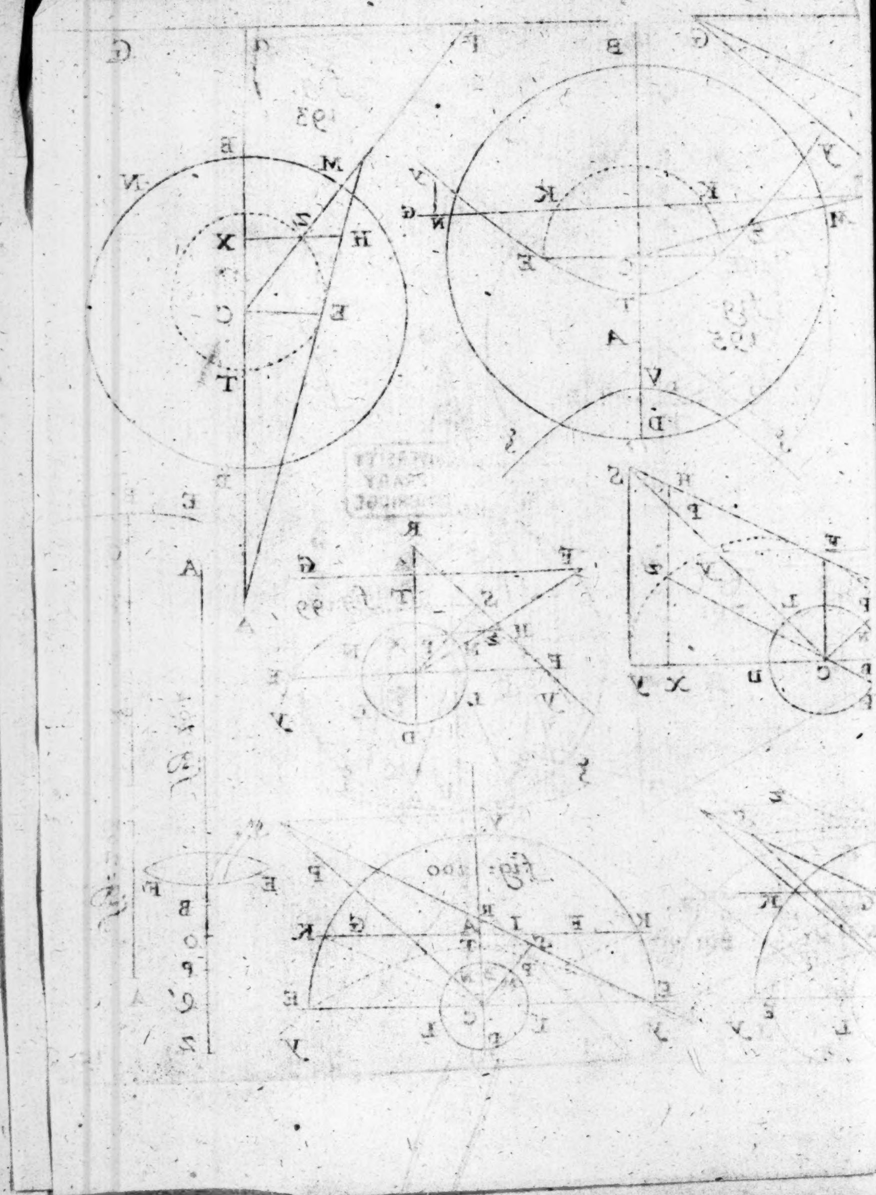


fig: 202

fig: 203

15.



ERRATA.

P*Ag.*3.*lin.*25 luce.(præſente,*leg.*luce(præſente *p*4,*l* 21,deſceptatur *l* diſceptatur *ib.l* 31,valeat,id *l* valeat id *p* 5, *l* 31, toto *l* tota, *p* 6,*l* 23, dici *l* dicitur, *p* 11, *l* 10, allas *l* alias, *p* 13, *l* 27, proximo *l* proximos, *p* 14, *l* 12, contraniſimum *l* contraniſum, *p* 14, *l* 16, effectant *l* affectant, *p* 15, *l* 14, nobile *l* mobile, *p* 16, *l* 20, in quæ *l* in iis quæ, *p* 17, *l* 3, ſubſtracto *l* ſubſtrato, *p* 17, *l* 5, citentur fig 10, *p* 17, *l* 20, fig 12 *l* fig 11, *p* 18, *l* 11, fig 13 *l* fig 12, *p* 19, *l* 17, tranſmitti *l* tranſmittit, *p* 22, *l* 21 πϛολεπτικῶς *l* πϛολημπτικῶς, *p* 23, *l* 6, incidentes (radios *l* incidentes radios, *p* 23, *l* 19, *S* B protracta *l* S B (protracta, *p* 28, ambages. I. Demonſtratæ proſtant *l* ambages demonſtratæ proſtant. I. Ut in P*arabola*, *p* 29, *l* 25, citentur fig 29, *p* 29, *l* 30, puncto divergentium tanquam *l* puncto divergentium radiorum reflexi rurſus divergunt tanquam, *p* 29, *l* 32, ſuo *l* ſeu, *p* 32, *l* 10, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, *p* 33. *l* 4, citentur fig 36, *ibid.* *l* 6, citentur fig 37 & 38, *p* 38, *l* 28, I q. R. A B. Γ *l* I q. R. & A B. T *p* 40, *l* 17, Sc *l* Si, *ib.* *l* 33, quoquam *l* quaquam, *p* 41, *l* 24, abeoque *l* adeoque, *p* 45, *l* 7, reciſſimi *l* rectiſſimi, *ib.* *l* 8, propriores *l* propiores, *p* 47, *l* 24, reſignare *l* deſignare, *p* 48, *l* 1, Z 2, *l* 2. *ib.* *l* 12, Nocetur ſi fuerit H N P *l* Notetu ſi fuerit H N ϖ, *p* 57, *l* 4, ejuſce *l* cujuſce, *p* 65, *l* 4, exiſtimari *l* exiſtimare, *ib.* *l* 22, ipſe *l* eſſe, *p* 67, *l* 13, interjaceret *l* interjacet, *p* 70, *l* 3, poſteribus *l* poſterioribus *p* 71, *l* 32, Adverſatur *l* Advertatur, *p* 71, *l* 15, γ S γ v *l* γ S. γ v. *p* 78, *l* 1, in eodem *l* eodem, *p* 89, *l* 25. ratiori *l* rariori, *p* 90, *l* 17, expanſem *l* expenſam, *p* 95, *l* 14, relect onibus *l* reflectionibus, *ib.* *l* 40, Sinus *l* Simus, *p* 96, *l* 3, ſimplicimè *l* ſimpliciſſime, *p* 97, *l* 8, quæſitam *l* quæſitum, *p* 105, *l* 28, Poſito *l* Poſitio, *p* 112, *l* 26, admodum *l* ad modum.

LECTIONES Geometricæ;

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA *DECLARANTUR.*

Auctore ISAACO BARROW Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.



LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, & *Octavianum Pulleyn* Juniorem.

M. DC. LXX.

Juventuti Academicæ.

Quæ tibi dicta fuit, dicendave fratris opella
Ista tui, tibi nunc jure dicata venit:
Tu potes ex illa si quicquam discere, fiet
Læta tuo simul ac tuta patrocinio.

Benevolo Lectori.



E Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis illis, quæ nuper editæ prostant, Comites & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret Librarius ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe rejectanei Schediasmatis molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò crassiùs & ἀπολαιότερον scriptæ sunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, quibus accommodatæ sunt, usum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obtestor, ut ab iis prorsus abstineant oculos, vel ut veniam saltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentiùs expono, nonnulla sperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inspicere. Ultimam amicus (vir sanè cum primis probus, ast in hujusmodi negotiis Flagitator improbus) extorsit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet suo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorsum tendant, facilè singularum initia delibans edoceberis; ut non sit cur te longiùs morer aut detineam. Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem sanè nescio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypothesium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) necessariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; seu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum species. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta possit, & reverà produci. Possunt autem, qui saltem hactenus usurpati sunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum se mihi jam cogitanti suggerentia sunt hæc; *per motus locales; per intersectiones magnitudinum; per quantitate positionéque determinatas ab assignatis locis distantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo dispositarum; per appositionem magnitudinum ad alias, vel subductionem ab aliis; per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & si qui sunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodò supponant oportet, utpote sine quo nil procreari potest, est iste, *qui per motum localem*. De quo proinde primo dispiciendum. De motu celebratur illud *Aristotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motu necessariò naturam ignorari; in Physicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (saltem quantùm humanus intellectus assequi valet, aut experientia commonstrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non absque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de caussis, de differentiis complura subtiliter argutantur Physici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 Phys. I.

vel cura. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimìs generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimùm à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ quæ velim quam primùm ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditiùs fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe, ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter duraſſe, quorum unum fuit antequam alterum cœperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſierit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coëxiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ità priùs mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantùm ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimé dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perduràſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus, ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ità motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidâque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ αὐτοὶ μηδὲν μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, Φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persensiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quam tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterum quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segnius, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideo motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus; *Fiant luminaria in firmamento Cæli, & dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æquitemporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quod à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quam cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certo ac exquisitè quantitates indicat)

Phys. IV. 16.

Gen. I. 14.

indicat) cùm organi cujusvis horodeictici, satis accuratè constructi, motibus consentire. Talis enim machina è fabrica sua comparata est, secundum motûs sui repetitiones succedaneas, æqualiter moveri; *Clepsydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ destinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem suam, & figuram, vímque descendendi prorsus eadem manet; nec non vasculum continens, & meatus ipsam transmittens haud omnino variantur, tantillo saltem tempore, pérque temperiem aëris consimilem, nec ideò causa subest ulla, cur non æquales in singulis effluxibus motus obire concedatur; ergò si compertum sit, Solares motus, seu quoad integras periodos, seu quoad partes ipsarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquisitè congruere, meritò pronunciandum est, eos prorsus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo discursu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cælestia corpora non esse, ex parte rei proprièque loquendo, primarias & originales temporis mensuras; ast illos potiùs motus, qui prope nos sensibus obversantur, & experimentis subjacent nostris, cùm horum ope cælestium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipse Sol temporis idoneus judex, aut testis αὐτόπτης est, nisi quatenus horariæ machinæ suffragio veracitatem suam adtestatur. Nec sanè, quod obiter interpono, potest ullo pacto sciri num periodi syderum ante multa secula transcursæ nostri seculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo scilicet asserat certò *Methuselam* illum qui tantùm non mille vitæ transegit annos, eo fuisse reverà μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, si Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos suas evolverat? Quid si tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipsa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum nostri temporis instrumentis comparata fidem suam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, existimâsse dicitur Solem initio dies longè prolixiores effecisse. Sed minùs id rationi consentaneum videtur, quia tales motus vertiginosi sensim elanguescere potiùs solent, quàm invalescere. Verum obiter hæc, & vix seriò; revertamur in orbitam. Temporis (seu permanentiæ rerum in suo esse, statu, motúve) quantitas, ut dictum est, à motu quolibet dignoscitur, bene notorio, æquabili, (seu quoad partes ad hoc adhibitas sibi constanter æquali ac simili) dein secundario è quibusvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correspondent, è cælestibus imprimìs, Solis potissimùm ac Lunæ. Adeo ut æqualia tempora sint, in quibus eadem clepsydra semel ac iterum, vel æquè multis visibus exhauritur; aut in quibus

eadem

eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adſumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minùs tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum ſit diſcimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimamus; ita tempus primò taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles*: οὐ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ
Phyſ. IV. 18. καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem aliàs quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quòd aliquatenus diviſibilis ſit, à motu verò quòd uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ità tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quòd eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum

expor-

exporrecta successione; quam spatii decursi longitudo demonstrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designabimus; arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instantibus respectivis justè respondebunt, & iis appositè repræsentandis inservient. His de tempore prælibatis ad considerandam vim motûs effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel undicunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus) merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta computo subjicitur. Etenim experientiâ compertissimum est, sæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, seu majus eodem tempore spatium conficere. Nec aliunde potest hoc procedere, quàm à majori vi, seu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúsque gratiâ velocius dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundum omnimodas proportiones contingat hic spatiorum unà peractorum excessus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas & sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivas succinctæ distinctionis ergò gradus appellare licet, & consuetum est) in partes, inquam, quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur; quas inter se nectens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppositionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas; è cujus succrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem absolutè considerando, quo vis hujusce quantitas menti seu phantasiæ rectè proponatur, sufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspicuitatísque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta spectata vis ista tempus non implicat, eóque secluso concipi potest (in quolibet enim temporis instanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æstimio Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum spatio tempus adsignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac discernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile spatium aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Uude consectatur singularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimo ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant amplius exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam utì nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ita perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas; nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeóque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit; quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut priùs etiam insinuatum est, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independentèr à se invicem ac impermixtè; itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coïncidat, hoc est in situ parallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiei partes cùm respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessariò sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem prius expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ita ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. È qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quod æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contráque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum, vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm ſin-

Fig. 1.

singillatim spectantur; nihil refert quinam angulus statuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ posuimus sponte consectantur; ut nullam aliam demonstrationem requirere videantur. Et sanè quoad omnes Mathematicæ αἰψει subditas (hoc est utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perspicere, tum summo eadem compendio demonstrare poterit, quisquis contemplationi suæ subjecta cujuscunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd si porrò velocitatis gradus continuò per singula temporis instantia supponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, seu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; consimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis superficiem æqualiter à puncto crescentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè passu decrescentem, exhiberi; simplicissimè verò,& optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúsque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis singulis instantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræsentatum æqualiter increscentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræsentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per respectiva ab initio tempora decursis spatiis repræsentandis inservient. Et consequenter, si velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum supponatur augeri, vel diminui, repræsentabitur tam aggregata velocitas, quàm spatium ei respondens à figura quadrangula Trapezia, qualis est CYYE, in figura priùs adhibita. Hinc, non secùs quàm in præcedentibus, hujusmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facilimè deprehendentur, atque demonstrabuntur; cujusmodi sunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale spatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipsum motum uniformem, modò velocitas hujus subdupla sit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd spatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, sese habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diversos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis transacta spatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et similia talia vel his connexa, vel indè consequentia, quæ triangulis conveniunt inter se quoad suas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex positis haud difficilè perspiciantur, ac demonstrentur.

Fig. 1.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt AEX, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens AE tempus definitum, linea BX primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima CX ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens DX (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum EX: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quà perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

LECT.

Lect. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuùm differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur,& quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, φορὰ, & περιφορὰ, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia verò penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quòd punctum *in linea recta*, *circulari*, *elliptica*, *spirali*, *vel alia quavis præstituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm intereà parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismaticæ, Cylindricæque*, tum

Fig. 3. quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem de-

Fig. 4. lineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accom-

Fig. 5. modatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plana (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hîc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitatē, sicut alibi fortasse luculentiùs & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quòd si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ B C parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, utì figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directriei lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelus deportari. Quomodò singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

* 10. XI. Elem.

rectæ

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonstratum est; unde si superficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam seu genetricem, seu directricem (quam ubique sitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo secetur, sectio communis duabus rectis parallelis constabit æqualibus inter se. De Superficiebus autem ità progenitis observatu dignum est (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, sed & generales nonnullas ipsarum affectiones è diversis resultantes generandi modis insinuare propositum est nobis) quòd si linea directrix recta sit (ut in figura per literam Z discriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ respectivis directricis lineæ partibus semper proportionales sunt (superficies nempe B C C B respectivis rectis B B:) At si linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non semper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at saltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel secundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuscunque, laxè vel strictè dicti, recti superficie; quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc est omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, sive subtensis rectis est perpendicularis.) Verum si, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt necessariò superficies A B B A peripheriis æqualibus B B insistentes inter se pares, quia (præterquam in casu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum subtensis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *insuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas superficies conantur dimetiri, seu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliisve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique consimili pacto superficiem quamvis planam directo motu sibi parallelo progredi, scilicet ut prædicto modo, singula ipsius puncta lineas rectas describant, inter se pares, ac parallelas; vel ut ejus singulæ rectæ (id quod indè consectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujusmodi motu describuntur prismatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipsa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúsque simili jure possunt adaptari, quæ Superficiebus istis ostendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipsorum, & ipsa corpora lateribus suis (seu directricis rectæ partibus respectivis) proportionantur. Quòd & si definita hujusmodi corpora planis

Fig. 6.

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, *seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satìs facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum, & vorticum, & turbinum, & in ipsorum fortasse syderum, motibus adparet.* Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, BCB,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua genesi colligitur circulorum, & sectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac similibus, constare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum ineundo circularis areæ talis qualis dimensio quam facillimè reperitur; id quod non est hujus temporis ulteriùs exponere. Quinetiam supponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protensam, uno manente fixo ipsius puncto circa designatam quamvis in alio plano constitutam lineam, curvam aut è rectis compositam, revolvi, sic ut ei nempe lineæ semper insistat, vel eam quasi lambat, aut perstringat.
Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protensa, & in ea fixum punctum V; & per V semper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujusmodi motu producetur curva Superficies (è planis saltem composita, quam & generali ratione, post *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem si linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; sin circularis fuerit, aut conicarum sectionum aliqua, Superficies evadet strictè *conica*; sin alterius generis aliqua, conica saltem extenso latiùs significatu dicatur; & à quibusdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas est, ex ipsa generatione manifesta, quòd si per fixum punctum V plano secetur, communis plani cum ipsa sectio erit angulus rectilineus. Nam si planum ipsam secans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipsam non secaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano secante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos transit, ipsísque proinde coincidit. In hujusmodi verò motu posito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (seu vertice) ad directricem lineam B C ductæ sunt inæquales inter se, satis liquet lineam B C non à lineà B delineari, vel perambulari, quia lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) sibi nequeunt congruere; adeóque punctum B progrediens supra, vel infra puncta B, E, C cadet;
Fig. 8. ut nec eâdem inæqualitate suppositâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu suo lineam describet lineæ directrici B C similem (quare linea V B supponitur indefinitè protensa) at verò si lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci possunt (quas Superficiei propositæ latera nuncupemus licet) proportionaliter secentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo sita est B C, parallelo) divisionum

sionum puncta lineam constituent, saltem ad lineam consistent, ipsi BC similem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, sint communes plani VBD cum planis BC, GH sectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iisdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL sunt æquales. Item se habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis est illi, quam habet VD ad VK (similia quippe sunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD.DE::GK.KL. ergò omnes subtensæ in GH proportionales sunt subtensis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ sibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ sibi adjacent in altera. Ergò secundum superiùs insinuata lineas BC, GH similes esse constat. || Hinc etiam patet lineas curvas similes BC, GH eandem ad se proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta sita, latera VB, VG. Quum enim subtensarum iisdem angulis inclusarum (ut BD, GK, vel DE, KL) singulæ rationes æquales sint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc est tota BC) ad omnes consequentes conjunctas (hoc est totam GH) se habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum superficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ scilicet à parallelis ad BC planis, à vertice desumptæ, quibuscunque lateribus iisdem inclusæ partes ipsarum sint inter se similes; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali similitudinis doctrina posthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex similitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúsque consimili Superficierum generatione satìs elucescit; saltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium similitudine satìs constat; siquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies composita censeatur.) Unde similium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diversis lateribus Superficies, eas inter se comparando, notandum est quòd basibus suis, seu directricis lineæ respectivis partibus non semper proportionales sunt; at saltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera sunt æqualia inter se, adeóque cùm linea directrix est peripheria circuli; quo casu producta Superficies erit conica Superficies strictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd si directrix BC supponatur e. g. peripheria circularis, lateráque sibimet inæqualia, si

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

 dividatur

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt*. || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ita ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu sitúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes; hoc est ita ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles*. || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu base, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis elucescunt. Nempe quòd à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eóque pacto *cùm integra cum suis Curvis Superficiebus Solida magnitudines innumeræ, tum ipsarum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur*. Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V $\alpha\delta$, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B β, C γ, D δ, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quòd integra peragatur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y; quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ δ V K, constituetur Solidum è Sectoribus A Z α, B Z β, C Z γ, & reliquis inter se similibus. Cæterùm prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem*. Objicit huic methodo non semel, in pererudito suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctissimus A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & sphærarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* componitur

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

| K

ponitur ipsum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adversari; methodúsque proinde fallax est. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana superficies* constant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam lineæ V D censeri debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa linea genetrice V D; quipped cùm per ea singula puncta tales peripheriæ transeant, nec plures transire queant; quicunque sit axis, seu longiùs distans, seu propiùs adjacens; axis enim solummodò, pro longiore vel propiore distantia positionéque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K supponitur constare, planorúmque quibus Solidum D V Y constat, è numero taxanda est punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipsi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen* (sedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujusmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo, reor, omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus.* Illum commonstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipsa V D in directum extendi, ità scilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipsi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; singulæ singulis, puta A X ipsi A Y, & C X ipsi C Y, ac ità continuò. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujúsque partes illius partibus respectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum per omnia lineæ genetricis puncta transeuntium* (hoc est si *spatii V D Z dimensionem* reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

Fig. 10, 11, 12.

plicentur

plicentur rectæ AZ, BZ, CZ, DZ ad ipsam VD perpendiculares, & æquales singulæ singulis in cono circulorum radiis per easdem literas designatis; fiet autem in hoc casu *Spatium* VDZ triangulum, quia rectæ AZ, BZ, CZ æqualiter à se distantes æqualiter increscunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium est. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine VD & base DZ, dimensio in promptu est. Quòd si fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipsius, ità triangulum VDZ ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propositæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaslibet hoc modo natas) investigare licet. At mihi propositum est generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum genesin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iste modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) similes innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta se situ dispositæ taliter constituuntur, ut singulæ centrum suum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem subit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam consistunt; quæ propterea dicitur ipsorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* existunt. Sed cùm motus ità distortos natura non capiat (saltem juxta modum operandi simplicem quem nunc supponimus) & quia possunt hujusmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abstinebimus. Neque non de magnitudinum per motus simplices effectione sufficiet hactenus disseruisse. ||

LECT.

Lect. III.

Quomodo per *motus ſimplices progreſſivum*, & *converſivum effecta concipiantur magnitudines*, & *qualia generationes iſtas conſequuntur ſymptomata* (nonnulla ſaltem præcipua) *conniſi ſumus exponere ad compoſitos nunc*, & *concurrentes*, *eidem propoſito ſervientes*, *motus accingimur*; quorum in effectis diſcernendis velocitates, ſecundum quas ſimplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis conſiderandæ ſunt; quarum in generatione per motus ſimplices nulla prorſus habetur ratio. Per eundem enim motum ſimplicem ſeu velocior is ſit, ſeu tardior eadem magnitudo, quamvìs non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejuſdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvìs ut hæc fiant eò magìs aut minus expectandum ſit, quo ſegnior aut citatior ſupponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compoſitos iiſdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum ſpecie, ſed etiam quantitate diverſæ magnitudines emergere ſolent, poſitione ſaltem perpetuò differentes. Ut ſi recta
Fig. 13. A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & ſimul punctum M in A B deſcendat uniformiter; vel ſimul recta A C parallelo quoque uniformi motu deſcendens ipſam A B promotam interſecet in M; ex ejuſmodi motuum compoſitione vel concurſu producetur recta linea A M. Quòd ſi eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C ſecet ipſam A B in μ, deſcribetur hoc motu alia recta A μ à priore A M poſitione diverſa. Sin verò, manente rurſus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi ſubſtituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejuſmodi compoſitione, vel concurſu fiet linea parabolica

parabolica A M X vel etiam aliter posita $A\mu Y$ (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodeque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, $A\mu$; vel angulorum ABM, $AB\mu$ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelus, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelus ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compositionem ab ipsorum concursu secerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos distinctius exponendos accedo. De compositione primum. Cùm autem motus duobus modis compositus intelligi possit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de posteriore nos dissertamus; quem fortè non meliùs quàm praenobilis Philosophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Cartes. princ. II. 31, 32. "Etsi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum sibi proprium, quoniam ab unis tantùm corpori-"bus sibi contiguis, et quiescentibus recedere intelligitur, parti-"cipare tamen etiam potest et de aliis innumeris; si nempe sit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut si quis am-"bulans in navi *horologium in* pera gestet, ejus horologii rotu-"lae unico tantùm motu sibi proprio movebuntur; sed participa-"bunt etiam ex alio, quatenus adjunctae homini ambulanti unam "cum illo materiae partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctae navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad-"junctae ipsi mari; et denique alio, quatenus adjunctae ipsi terrae, "siquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e-"runt in rotulis istis, sed quia non facilè tam multi simul intel-"ligi, nec etiam omnes agnosci possunt, sufficiet unicum illum, "qui proprius est cujusque corporis in ipso considerare. Ac prae-"tereà ille unicus cujusque corporis motus, qui ei proprius est, "instar plurium potest considerari; ut cùm in rotis curruum du-"os diversos distinguimus, unum scilicet circa ipsarum axem, et "alium rectum secundum longitudinem viae per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non sint reverà distincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan-"tùm aliquam lineam describat. Nec refert quòd ista linea saepe sit "valde contorta, et ideò à pluribus diversis motibus genita vi-"deatur, quia possumus imaginari eodem modo quamcunque li-"neam etiam rectam, quae omnium simplicissima est, ex infini-"tis diversis motibus ortam esse. Ut si linea A B feratur versus "C D, et eodem tempore punctum A feratur versus B, linea Fig. 16. "recta A D, quam hoc punctum A describet, non minus pende-"bit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quae à quovis rotae puncto describitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis saepe utile sit u-"num motum in plures partes hoc pacto distinguere ad facilio-"rem ejus perceptionem; absolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius.* Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi* cum *Progressivis, Progressivi* cum *Circumlatitiis, Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficiliùs; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magis positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatiiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientiæ vehementer affectant.* Recti motns (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum sibi non immeritò locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sané magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ iu eo (lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ità genitis terminatur, ac circumscribitur Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e. g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B. A C :: B M. C μ. vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelus applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secùs; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modò quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus, agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis causâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelismum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

Lect. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimìs methodi causâ repeto ſi recta A Z per rectam A Y ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis A Z poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per A Y ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia A B, A C ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ B M, C M ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur A B. A C :: B M. C M. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem; regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur intereà, quòd brevitatis causâ motum parallelum uniformem rectæ A Z per A Y appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea A Z motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per A Y et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuo crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu composito transverso per BC (vel huic parallelam MG) & descendente per AZ, uniformi utroque; transversus autem per MG est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita MNO describitur; patet velocitatem descendentis motûs uniformis rectam MN gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam MNO describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illò, cùm continuò crescere ponatur, in toto tempore descensus per GN illo tardior fuisset, adeóque nunquam eodem tempore spatium æquale transegisset, nec unà cum eo pertigisset ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increscens per tempus motûs uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus spatium emetitur, quàm uniformis motus descendens, quo MN. ad K protractus describitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quàm à minore neutiquam crescente) quare linea HO major est quàm HK; adeóque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibusvis lineæ MNO punctis conveniat, abunde patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis descendentis, quo curvæ MNO subtensa quævis (ut MN) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejúsque arcus fiunt, minor est velocitate, quàm motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ *subtensa* quælibet (ut MO) intra *suum arcum* (versus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8.

Nam si sumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, si producatur, extra lineam MNO cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, utì mox ostensum.|| Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides*, *de sectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propositam esse convexam, aut concavam ad easdem partes (convexam versus partes superiores vel exteriores AY, concavam introrsum, aut deorsum versus AZZ) nam hoc ipsum, fore convexūm aut concavum ad easdem partes, nil omnino designat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis secari; nec aliò recidit, quam initio libri de sphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad easdem partes cavæ definitio. Perspicuum est v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO secans ei rursus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, versúsque partes AY recurvari; id quod modò demonstratum est non posse contingere. Quapropter ipsa linea versus easdem partes convexa est, seu concava.

V. Apertissimè constat lineas quasvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propositam curvam secare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam descripta censetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto secat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat instans temporis durat in situ quovis uno, seu BZ; simúlque pertingit ipsam BZ, ac deserit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta sunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum est ipsam BZ in uno tantùm puncto curvam secare. || Hoc ipsum de parabola, & hiperbola speciatim ostendit *Apollonius*; de sectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non dissimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propositam curvam attingere. || Quòd semel occurret (modò contineatur intra limites descensûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò descendens, indefinito progressu, eam indefinitè protensam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de sectionibus conicis ostendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ subtensas rectas cum AZ & ei parallelis, si producantur, concurrere.

Quòd enim subtensa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi scilicet ubi ipsa curvam secat, exinde manifestissimum est, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum describitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidiſtat recta, pariter omnibus æquidiſtat, ut in elemento primo demonſtratur.

I. 22. Operæ pretium exiſtimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* ſpeciatim demonſtrare.

VIII. Simili modo patet rectas quaſcunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus.

I. 24, 25. Iiſdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *ſectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonſtravit *Apollonius*.

IX. Quinimò rectæ quævis ipſam A Z ſecantes (infra punctum A, ſupràque limitem, ſiquis erit, motûs deſcenſivi) curvam ſecabunt.

Cùm enim omnes ipſi A Z parallelas ſecent etiam infinitè pro-

I. 27, 28. ductæ curvam ſecent oportet. *Hujuſmodi Symptomatis demonſtrationi in ſectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam A Y, ipſi A Z parallelas (quas nempe propoſitæ curvæ ſinus verſos appellare fas erit) minorem inter ſe rationem habere (minores cum majoribus comparando, ſeu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent reſpectivæ ipſius A Y partes, iiſdem temporibus decurſæ (quas & curvæ propoſitæ ſinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe B M ad C N minorem rationem habet, quàm A B ad A C, vel B M ad C F; quia C N ⊏ C F. || Hoc de circulis, & aliis curvis ſpeciatim reperiatur paſſim oſtenſum.

Ad ſequentia notandum, quod ſi recta tranſverſim & parallelus mota retrogradè (à D puta verſus A per D A) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propoſitæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque ſemper ratione dictum punctum ab O aſcendens quoad velocitatem decreſcat, quâ ad ipſum O deſcendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus ſit, inversè tantum conſideratus.

XI. Supponatur rectam lineam T M S propoſitam curvam in puncto M tangere (ſic ut eam nempe non ſecet) occurrátque tangens hæc rectæ A Z in T, ducatúrque per M recta P M G ad A Y parallela; dico velocitatem puncti deſcendentis, eóque motu curvam deſcribentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta T P deſcribetur uniformiter eodem tempore, quo recta A Z fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelus delatæ, altero puncti descendentis à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitnr; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta K G curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum O G minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuò perseverans, illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quò tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem breviùs exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam T P describeret tempore PM vel A C (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam ſumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam verſus partes AT velocitas aſcendentis puncti, curvam efficientis, ſemper decreſcit ab M ad O, illi verò ex hypotheſi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decreſcit ab M ad K, ſitque tempus MG commune, erit ſpatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia verſus alteras partes, velocitas deſcendentis, quo curva fit, increſcit ſemper ab M verſus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud creſcit ab M ad K; idémque ſit rurſus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K ſupra curvam exiſtere. Quare manifeſtum eſt omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiſtere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hiſce ſtatim *conſectatur*, *hujuſmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & ſi fieri poteſt altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ ſcilicet, quæ puncti curvam deſcribentis ad contactum M acquiſitæ velocitati æquatur) deſcribetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter poſitam MT. || *Hanc ſpeciatim de circulo demonſtravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aſpernandum, quòd eâdem operâ *propoſitiones de tangentibus inverſæ demonſtrantur.* Nempe ſi determinetur angulus PMT (vel alter quiſpiam quem recta poſitione data cum tangente facit ad punctum curvæ deſignatum) aut ſi determinetur quantitas rectæ PT (vel ſimilis cujuſpiam alterius à puncto in data poſitione recta deſignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, ſi tangens ſitu determinetur, angulorum atque linearum ejuſmodi quantitas indè dignoſcetur. Adeóque parcetur operæ, qualem inſumpſerunt plerique tales propoſitiones inverſas demonſtrandi. Quod & eo magis obſervatu dignum eſt, quia ſæpe talium inverſarum propoſitionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque facilius demonſtratur. Cujus obſervationis, niſi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina*.

Eucl. III. 16, 17. *Apoll. I.* 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti deſcendentis velocitates in duobus quibuſvis deſignatis curvæ punctis ad ſe proportionem habere reciprocè com-

compositam è rationibus applicatarum ab istis punctis ad rectam AZ (ipsi scilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad ista puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione subductæ.)

Nempe si duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipsius TP ad PM, & ipsius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY se habet ut TP ad PM; & velocitas ista uniformis se habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus TP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concursu tangentium ductâ FE ad AY parallelâ; fore TE, XE $= TP . PM + QN . QX$. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem consequi *Problematis istius solutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingeniosissimè reperisse. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipse *Galilæus* ad manum non est) propositâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod sublime reperire; è quo si grave cadat usque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipsa *propositam parabolam* describat (notetur, quod motus descensivus parabolam describens non è puncto sublimi, sed ab ipso puncto A censetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* suppositis insistendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, seu transversi, & æqualiter crescentis descensivi quorum è compositione descripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque sit crescentis descensivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; specialem illum de *parabola* casum in exemplum subjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ sanè curvæ diameter est) punctum aliquod, ut P, à quo si ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, sit intercepta TP æqualis ipsi PM; tum sumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile descendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam describendo (ponitur enim increscentis velocitatis motus utrobique prorsus idem) iste verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T descendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

 lata,

lata, perque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motûs ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. | Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ità facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *data parabolæ rectum latus*. Est igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq$ $= TPq$ (ex hypothesi modi nostri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4\, APq$. Ergo est $R \times AP = 4\, APq$. Adeóque $R = 4\, AP$; vel $\frac{1}{4} R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quòd si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq\, AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $=$ TP cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur à vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3} TP$) est TP cub. $= 27$ AP cub. Erit igitur $Rq\, AP = 27$ AP cub. Adeóque $Rq = 27\, APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

Fig. 22.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem base constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

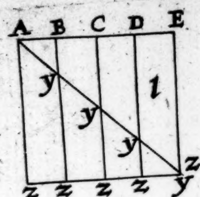
Ut si ad rectam αδ applicetur plana superficies αδμ, & utcunque divisâ AD punctis B, C, similitérque divisâ rectâ αδ punctis β, γ, fuerit ut BM ad CM ità superficies βαμ, ad superficiem γαμ, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo* αδμφ, *se habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut superficies* αδμ *ad parallelogrammum* αδμφ. Et enim si recta αδ commune tempus designare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato transiguntur, recta δμ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est) *Parallelogrammum* αδμφ optimè *Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus αδ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam TP. Cùm igitur, ex hypothesis præstratæ conditione, figura δαμ rectam DM, vel AP, repræsentet, erit ut figura δαμ ad parallelogrammum αδμφ, ità AP ad TP; cognitáque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ BM, CM se habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc est ut quadrata ex αβ, αγ. Ergò si figura αδμ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula βαμ, γαμ proportionalia erunt quadratis ex αβ, αγ, hoc est rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum δαμ parallelogrammi δαφμ est subduplum, erit recta AP quoque rectæ TP subdupla; quod ità se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM se habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc est ut cubi rectarum αβ, αγ; & si *superficies* αδμ *fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis*, *trilinea* αβμ, αγμ *cubis ex* αβ, αγ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cúmque constiterit aliundè tum figuram αδμ subtriplam fore parallelogrammi αδμφ; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta AP quoque subtripla rectæ TP. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

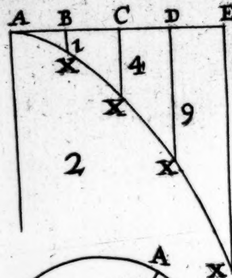
Fig. 23, 24. *Hæc posthàc γεωμετρικώτερον demonstrata habentur.*

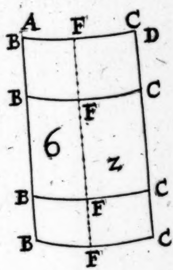
XVII.

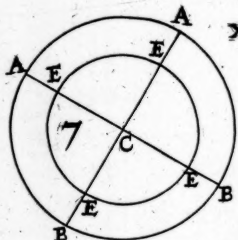
XVII. Huic suppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc est
Fig. 23, 24. ad ejus singula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD consimiliter divisam applicatarum differentiis proportionales, resultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque basin positum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut si rectæ AD, $\alpha\delta$ similiter (in partes scilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\epsilon\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ sunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales sint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus seipsâ minorum differentiis (ipsis nempe BM, NM, OM) & trilineum $\alpha\delta\mu$ constituatur è rectis $\epsilon\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione crescentibus; ut & recta CM æquatur ipsis BM, NM; & ei respondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quasi conflatur è parallelis $\epsilon\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione crescentibus; & hoc semper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\epsilon\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo relpsâ differre. Notetur autem hic rectas $\epsilon\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræsentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in respectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\epsilon\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita respectiva temporis instantia; quibus (ut jam olim præmonitum) respondentia spatia BM, CM, DM proportionantur.

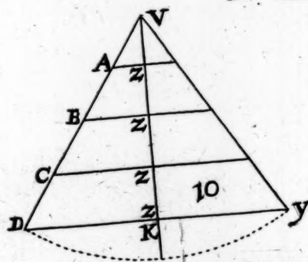
XVIII. E supradictis porrò consectatur, quod si *Circulus*, *Ellipsis*, ejusmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas describens infinitam in recursûs puncto velocitatem habebit. Nempe si quadrans APM ità generetur; quoniam
Fig. 25. tangens TM diametro AZ est parallela, nec illa proinde cum hac nisi ad infinitam distantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY se habebit, ut infinita recta ad ipsam
II. *preced.* PM; unde velocitas ista ad M prorsus infinita sit oportet. Ità quidem quoad hujusmodi curvas; at quoad alias ad infinitum sensim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) descendentis puncti velocitas in quovis designato curvæ puncto finita est. Verùm his omissis ad alias propositæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.


A B C D E
1

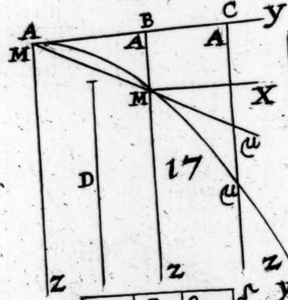

A B C D E
1
4
9
2

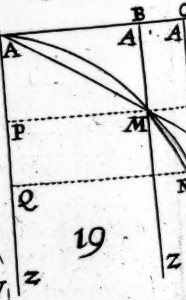

A F C
6

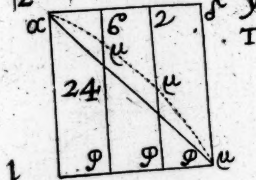

7

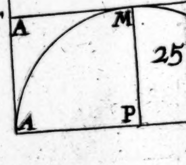

V
10

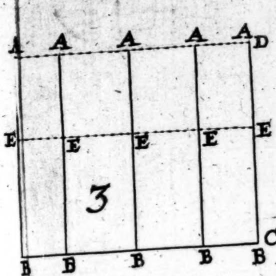
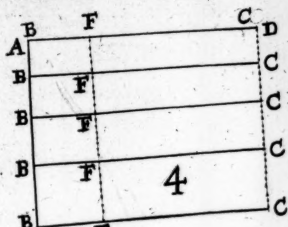
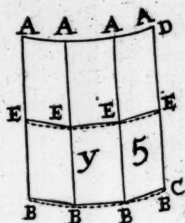

V
11

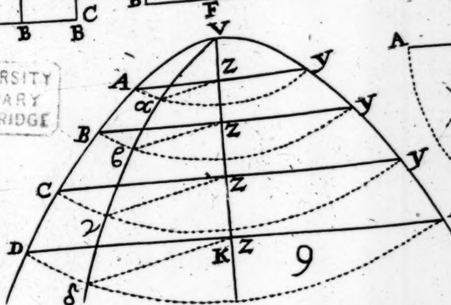
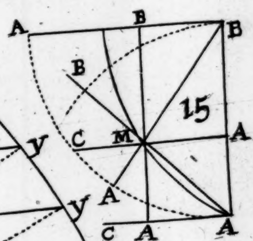
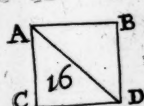
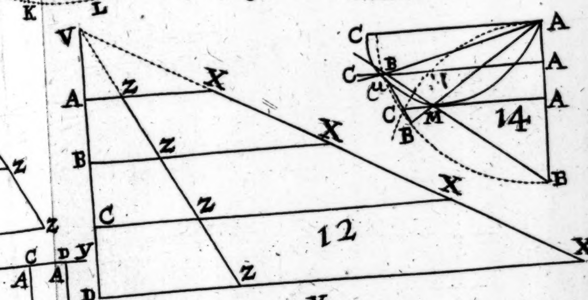
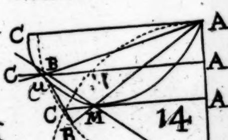
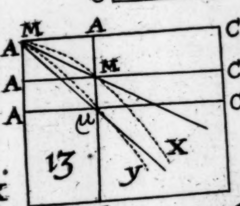

17


19

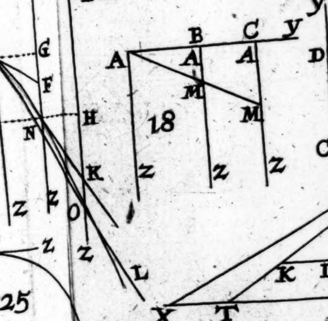
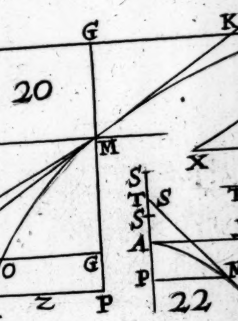
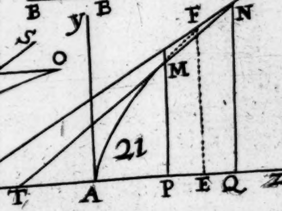

24

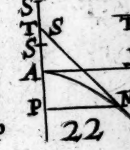

25

6.

T: Cross sculpsit

LECT. V.

IN deducendis è propositâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diversa curvæ puncta, sibimet inæquales sunt; & minores sunt illi qui puncto A (seu vertici) propiores sunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ sint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipsi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipsa XN secabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifestum est autem cùm puncta H, N sint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH sese intersecare inter parallelas PH, QE; quare major est angulus externus QNX interno QET, hoc est angulo PMT: Q. E. D. Fig. 26.

II. Hinc *porismatis* loco habetur *tangentes se intersecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protensas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem esse*; (externum scilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quasvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quàm remotiores.

Cæterùm ista jam olim de *Sectionibus Conicis* ostenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* est videre.

V. In figura præcedente (posito applicationis angulum TAY rectum esse, vel obtusum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem esse; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur subtensa M N, ducatúrque recta N R ad Z A parallela. Et quoniam angulus X P H non minor est recto, erit, eo major externus, N H P obtusus. Ergò recta N M major est quàm N H. Itaque magis arcus, arcus N H major est quàm ipsâ N H: Q.E.D.

Item, quoniam ang. R N E ipsi X Q E par haud minor est recto, erit R E ⊏ R N. quare M R + R E ⊏ M R + R N. hoc est M E ⊏ M R + R N. Est autem (ex *Archimedais* assumptis) M R + R N ⊏ arc. M N. ergò magis est M E ⊏ arc. M N ∴

V I. Perutilis est hæc propositio in *tangentium demonstrationibus expediendis*. Etenim hinc consectatur, si arcus M N indefinitè parvus ponatur, ejusce loco alterutram tangentis particulam M E, vel N H tutò substitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & consimili modo descriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonstratione munitam.

Fig. 27. Recta A Y sibi parallelè deportata quamcunque curvam ad easdem partes convexam aut cavam, A P X perambulet uniformi motu (scilicet ut æquales curvæ partes æqualibus transigat temporibus) eodémque simul tempore punctum aliquod ab A per A Y etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva A M Z; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta M P ad A Y parallela, curvam A P X secans in P; pérque P ducatur recta P E curvam A P X contingens; huic verò per M ducatur parallela M H; ínque hac sumatur punctum quodpiam R, & ducatur R S ad P M parallela; tum fiat ut curva A P ad rectam P M (hoc est ut unus motus uniformis ad alterum) ità M R ad R S; & connectatur M S. hæc curvam A M Z continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta Z X ad M P parallela, secans curvam A P X in X, ejúsque tangentem in E; & huic parallelam M R in H; ipsámque demum M S in K. Sit autem primò punctum Z supra M versus A; unde recta P E ⊐ arc P X. adeóque P A . P E ⊏ arc P A . P X :: P M . P M — X Z :: P M . E H — X Z :: P M . Z H — E X ⊏ P M . Z H. quare permutatim erit P A . P M ⊏ P E . Z H. est autem P A . P M :: M R . R S :: M H . K H :: P E . H K. ergò P E . H K. ⊏ P E . Z H. quare H K ⊐ Z H. est autem punctum H extra curvam A Z M, ob E Z ⊐ X Z ⊐ P M = E H. ergò palàm est punctum K extra curvam A Z M existere. Sit verò secundò

punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; Fig. 27.
unde arc PA. PE ⊐ arc PA. PX :: PM. XZ — PM :: PM. XZ — EH :: PM. XE + HZ ⊐ PM. HZ. & vicissim PA. PM ⊐ PE. HZ. Verum ut priùs) est PA. PM :: PE. HK. ergò PE. HK ⊐ PE. HZ; proptereàque HK ⊏ HZ; rursus itaque liquet Punctum K extra curvam existere. Tota proinde recta MKZ extra curvam versatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In transcursu hoc. ad alias curvæ nostræ passiones revertamur.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipsi MT) parallela ducatur quæpiam EF (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T sumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva sumatur punctum quodlibet, & Fig. 28.
ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta EF eidem occurret; at curvam priùs transiliat oportet. ergò liquet Propositum.

VIII. Eâdem operâ patet, si punctum assumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectumE F curvæ bis occursuram, tam supra quàm infra contactum M.

Operosè connisus est *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* ostendere. *Con. I. 27, 28.*
Cæterùm ad penitus determinandos occursuum locos *Specialis modus seu ratio motuum descendentis atq; transversi cognosci debet*; tunc eos *Analysis* statim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (HM, KN) ad curvam proposi- Fig. 29.
tam æqualiter inclinentur (hoc est æquales cum ejus ad occursus tangentibus (puta cum ipsis MT, NX) angulos efficiant) hæ extrorsum divergent, seu ad partes EF productæ concurrent.

Nam ducatur subtensa NM; hæc utiq; secundum antedicta cum ipsa AZ conveniet, puta ad O. Est ergò ang. OMH ⊐ (ang. TMH = ang. XNK ⊐) ang. ONK. ergo ang. HMN + MNK ⊏ 2 rect. ergò rectæ HM, KN concurrunt ad partes EF. Limitandum est hoc, intelligendo pares angulos HMA, KNA ad easdem partes vesari; seu alterum alteri fore externum interno. aliàs cotnrà eveniet.

X. Si fuerit recta HM *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tan- Fig. 30.
genti MT) & in hac sumatnr quæpiam definita HM; erit HM mi- *Apoll. V. 38 &c.*
nima rectarum omnium, quæ à puncto H duci possunt ad curvam.

Ducatur enim quævis H O ; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R, liquet H R majorem esse quàm H M ; multóq; magìs esse H O $\sqsubset$ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si H M minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam secabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergò quum sit H R $\sqsubset$ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta H M minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) X M ; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X, H M T ; totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem esse.

Nam ducatur subtensa M N ; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam H O secabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum H M constituit ad M) erit H N R magìs obtusus, adeóq; recta H R $\sqsubset$ H N & magis H O $\sqsubset$ H N.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad easdem puncti M partes puncto curvæ occurrere ; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ sint rectæ I N, K O ; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares E N, F O ; hæ cum ipsa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P ; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. F O K = ang. F P H $\sqsubset$ ang. P R Q = ang. N R H = ang E N J. Cùm ergò sit ang. F O K major angulo E N J, liquet propositum.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K $\sqsubset$ ang. E N I. Item ang. O H M $\sqsubset$ ang. N H M. hoc est ang. K O H $\sqsubset$ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H $\sqsubset$ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H $\sqsubset$ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R $\sqsupset$ H M. & magìs H O $\sqsupset$ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. Apoll. V. 32.

XX. Item si recta HM sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. Apoll. V. 29.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. Apoll. V. 30, 39.

Nam si dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M cùrvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. Apoll. V. 31; 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. Apoll. V. 30.

 Cùm

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* intròrsum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si HM sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus eandem extrorsus continget*. unde constat *Propositum*.

Cæterùm *minimarum* & *maximarum propior determinatio pendet ex speciali curvæ natura*.

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura*. Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicæq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

Lect. VI.

Ad easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observaram specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuero; pro meo more quàm concicissimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam* (è simplicioribus nempe vulgatioribúsque perplexiora minúsque perspecta deducendò) *partim circa multarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quàm promptissimè determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ Quin è vestigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & brevius ostendendis aliquem prospicimus usum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D; sit item linea O D O talis, ut per D ductâ quàvis rectâ D N; sit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénsq; ipsi A B in L; & in protracta B L sumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob positam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum sit D H . H O :: (D L . L N : : D L—

D H.

DH.LN—HO::LH.LB::) LH.HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH — HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam ODO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam NDS. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R.S::LB.LZ; & R.S::DL.DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones istæ Archimedeæ, ac Vieteæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus POQ *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fietq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D; sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secentúrque DL, BL punctis E, F, ut sit DL.DE::X.Y::BL.BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL.DH::LN.HO::LB + BN.HO:: DE × LB + DE × BN.DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL.DE::MN.MO::BN.KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE.DL::BF.LB;) erit DL.DH::DL × BF + DL × KO.DE × HO; hoc est DL × BF + DL × KO.DH × BF + DH × KO::DL × BF + DL × KO.

DE × HO ergò DH × BF + DH × KO = DE × HO; hoc est DH × BF + DH × HO — DH × BL = DE × HO; transponendo igitur est DH × HO — DE × HO = DH × BL — DH × BF. hoc est EH × HO = DH × FL; vel EH × GO + EH × HG = DE × FL + EH × FL; quare, demptis æqualibus, est EH × GO = DE × FL; vel ZG × GO = DE × FL; cum itaque DE × FL sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monstrat; nec abludit modus demonstrandi. Fig. 40.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, perque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ intersecantes punctis OP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit MN.MO —⊐ XY.XP. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO :: (XY.XV) —⊐ XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo est NO.MO —⊐ YP.PX.

VII. Quinimò si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO —⊐ YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO —⊐ YF.FV; & EO.OM —⊐ FV.VX. igitur ex æquo est NE.OM —⊐ YF.VX. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur PQ = PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quàm habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad easdem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.

linea

linea O O O talis, ut si è D utcunque ducatur recta D O, secans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Nam ducatur D L ad B C parallela; sitque D L . D E : : X . Y; & per E ducatur E R ad A B parallela; secans B C in Z; demum per O ducatur O H ad B A parallela.

Est jam D L . D E : : D M . N O : : L M . G O (ob similia triangula D L M, N G O) : : L M × D H . G O × D H item D L × H O = L M × D H (ob D L . L M : : D H . H O) quare D L . D E : : D L × H O . G O × D H hoc est D L × H O . D E × H O : : D L × H O . G O × D H adeóq; D E × H O = G O × D H. hoc est D E × H G + D E × G O = G O × D E + G O × E H quare (communi sublato) est D E × H G = G O × E H; seu D E × H G = G O × Z G. Patet itaque curvam O O O esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* Z R Z C.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipsæ A B, C B asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magìs id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

X. Esto positione data recta I D, in qua punctum designatum D,
Fig. 44. sit item curva D N N talis ut in I D sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad positionem datam I K parallelá; tum adsumptis determinatis rectis m, b; positisq; D G $= x$, & G N $= y$; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea D N N *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur M L ad I K parallela, factóq; $b . m : : m . $ M Q; sit M Z $= 2$ M Q $= \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T asymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipsam Z T secet in P). & connectatur D Q. Est ergò P N = R G + G N — R P. Verùm est M D . M Q : : Z R (M G) . R P; hoc est $m . \frac{mm}{b} : : m + x$. R P $= \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$. adeóq; R G — R P $= \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$. ergò P N $= \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde P N × M G $= \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$. Verùm (ex hypothesi) est my

+

$+ xy - \frac{mxx}{b} = 0$. ergò $PN \times MG = \frac{m^3}{b} = MD \times ZQ$. vel $PN . ZQ :: (MD . MG ::) QD . ZP$. Quapropter est $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Unde palàm est curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus asymptoti Z M, Z T. Fig. 44.

XI. Notetur; si æquatio sit $my - xy = \frac{m}{b} xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc solùm puncta G ad partes D M sumuntur. Quin & si æquatio sit $xy - my = \frac{m}{b} xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipsi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum B D F; & linea D N N talis, ut ductâ utcunque R N ad B D parallelâ (quæ lineas B F, D F, D N N secet punctis R, G, N) connexâque rectâ D N; sit perpetuò D N proportione media inter R N, N G; erit linea D N N *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur D K ad D B perpendicularis (secans ipsam R N in E) & sit F H ad D B parallela; vocentúrque $DB = b$; $DF = d$; $FH = f$; tum $DG = x$; & $GN = y$; Estque $d . f :: x . \frac{fx}{d} = GE$, unde $\frac{2fxy}{d} + xx + yy = 2 EG \times GN + DGq + GNq = DNq$. Porrò est $d . b :: FG . GR :: d - x . RG = b - \frac{bx}{d}$. Unde $RN = b - \frac{bx}{d} + y$. Et ideò $by - \frac{bxy}{d} + yy = RN \times NG = DNq = \frac{2fxy}{d} + xx + yy$. quare $by - \frac{bxy}{d} = \frac{2fxy}{d} + xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b} y - yx = \frac{d}{2f+b} xx$. quòd si ponatur $m = \frac{db}{2f+b}$; erit $my - xy = \frac{m}{b} xx$. Unde liquet D N N esse *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus D G N rectus fuerit, evanescente tum $f = 0$, erit

 $d =$

$d = m$; vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hîc (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptísque determinatis lineis g, m, r; positísque D G $= x$, & G N $= y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur D M $= m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur M Q $= \frac{mm}{r}$; & sit Q Y = M Q; & ab M Y auferatur Y Z $= g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam P N = R G — R P — G N $= \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque P N × M G $= \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg$ = D M × Z Q. unde P N . Z Q : : (D M . M G : :) Q D . Z P. ergò P N × Z P = Z Q × Q D. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47' XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit R . D B : : D B . P. Est ergò B E . D C : : D B . P. Item est D B . B E : : D C . C N. ergò D B . B E + B E . D C = D C . CN

GN + DB.P: hoc eſt DB.DC::DC × DB. CN × P. hoc eſt DB × DC. DCq :: DC × DB. CN × P. Quapropter eſt DCq = CN × P; ergò patet *curvam* D N N *eſſe parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipſi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* ſed operoſâ (ſi probè memini) prolixitate, demonſtratum. *In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iiſdem poſitis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam ſemper habeant B E, B C rationem eandem (puta quàm B D ad R) erunt etiam interſectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam biſecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, ſecans curvam D N N in V; & quoniam eſt B C. R:: BE. BD:: CN. CD. erit B C × C D = R × C N. ergò (ſecundum benè notam *parabolæ proprietatem*) eſt curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria ſunt forſan iſta; ſed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis ſimiliter poſitis, recta C X non jam ad ipſam BA, ſed ad aliam poſitione datam (D H) feratur parallela; ſitque perpetuò B E. D C:: D B. R; erunt *interſectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur D B = b. B H = h; D G = x. G N = y. Eſtque $x.y::b.\frac{by}{x}$ = B E. item $b.b::y.\frac{by}{b}$ = G C. quare C D = $x - \frac{by}{b}$. Eſt igitur (ex hypotheſi) $\frac{by}{x}.x - \frac{by}{b}::b.r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{hry}{b} = \frac{h}{b}xx$. ponendóq; $\frac{hr}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; eſt ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ ſuprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam ſi (reliquis, ut in præcedente, ſuppoſitis) ità jam feratur C X, ut ſemper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èſtque jam B C = $b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x}.b - x +$

 by

$\frac{by}{b} :: b . r$. unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{hr}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. xxx; hoc est (posito $\frac{hr}{b} = m$) $yx + hx - my = \frac{m}{r}xx$; Est igitur curva B N N *hyperbola*, qualem superiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ positione sint rectæ D B, B A; (& in D B designetur punctum D) sitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N ad B A parallelâ; sumptis verò determinatis g, r, vocatísque D G $= x$; & G N $= y$, sit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, sic determinanda.

Fig. 53.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *asymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, est Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P × P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypothesi est $- gx + ry - yx = 0$. ergò Z P × P N $= gr =$ Z E × E D. undè liquido constat Propositum.

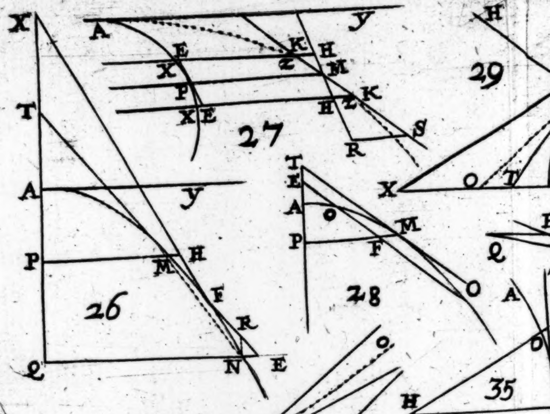
Quòd si fuerit æquatio $xy - ry = gx$; sumenda est D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductísque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehensa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius B E ad ipsam B F æqualis assignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X intersectiones ad lineam rectam.

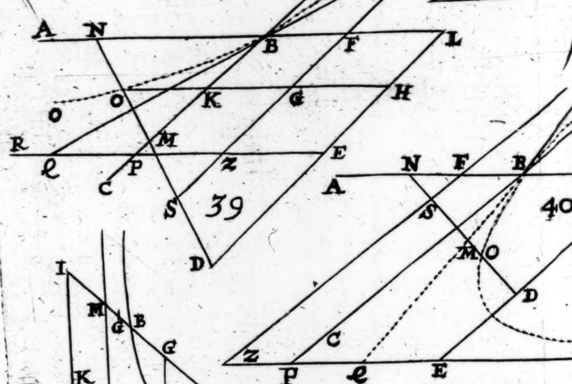
Nam per N ducatur G K ad B A parallela; estque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque semper est D G = R. Patet igitur factâ D G = R, & ductâ G K ad B A parallelâ, intersectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis, sumpto autem alio in B A puncto O, ab hoc sumatur computandi initium, ut nimirum sit perpetuò B E, O F :: D B . R, erunt intersectiones N ad *hyperbolam*.

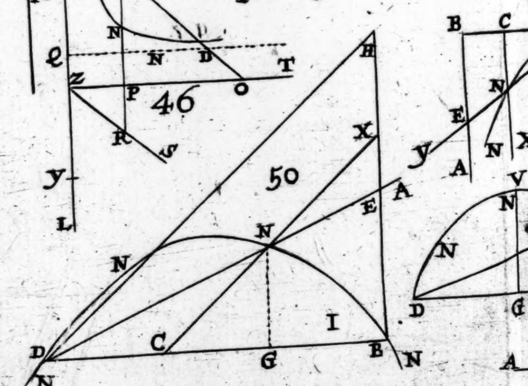
Nam ductâ N G ad A B parallelâ, sit D B $= b$; O B $= g$; D G =



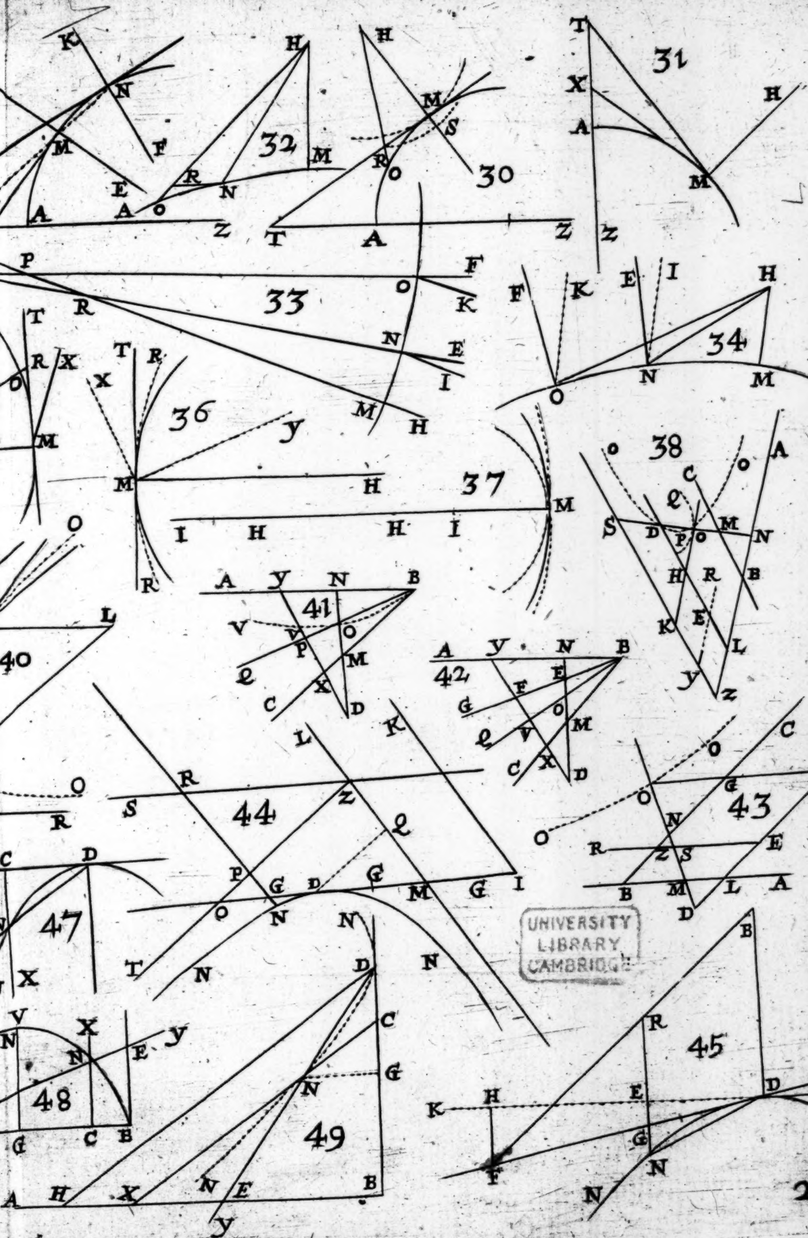
X A y E K H X z M P H Z K X E S R T
27
26
A y P M H F R Q N E
T E A O M P F O Q
28
H
29
X O T
A
O
35
H



A N B F L
O O K G H
R M E
Q P Z
C S
39
D
N F B
A
S
40
M O
D
Z C
P Q E



I M G B G K N Q N D T Z P O
46
R S
y L
H X
50
E A
N N
D C G B N
N
I
B C N E y A N X
V N N D G A



54.

5.

dem.

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN est *hyperbola* suprà mox determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta FX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ità ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad m) erunt intersectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; est ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare NK (FH) $= y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Est ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde resultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$. vel facto $f . b :: m . r$; est $my + gx - yx = \frac{m}{r}xx$. Constat igitur lineam DNN esse *hyperbolam*; qualis superiùs habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipso puncto H. initium sumat, (hoc est sit BE. HF :: DB. m) evanescente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r}xx$; unde quoque, suprà habetur alia determinatio simplicior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò $PY = \sqrt{:PMq - DBq}$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum est A, *semidiameter* AD, (vel *asymptotos* AB) *semiparameter* autem P; faciendo AD . DB :: DB . P. Fig. 55.

Sit enim $TD = 2AD$. Estque AD . P :: (ADq . DBq :: APq . PMq :: * $TP \times DP + ADq$. PMq :: $TP \times DP$. PMq $-$ DBq ::) $TP \times DP$. PYq. vel TD . 2P :: $TP \times DP$. PYq. unde liquet Propositum. *6. 2. Elem.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq. PYq :: PA. PS.

Nam est PMq. DBq :: PAq. ADq :: PA. AS. ergò per rationis conversionem est PMq. PYq :: PA. PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis; sit jam $PY = \sqrt{PMq + DBq}$; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF. AD :: AD. P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2 FA; éstque AF. P :: (AFq. ADq :: DBq. ADq :: PMq. APq :: PYq — DBq. APq :: AKq — AFq. KYq ::) TK × FK. KYq :: AF. P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq. PYq :: PA. PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA. AS :: PAq. ADq :: PMq. DBq. ergò PA. PS :: PMq. PMq + DBq :: PMq. PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq. DBq (ACq) :: AEq. EFq :: ADq — AEq. DBq — EFq. Hoc est ADq. ACq :: VE × ED. EGq. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EFq. EGq :: EA. ET.

Nam ob AE. AD :: AD. AT. est AEq. ADq :: AE. AT. unde AEq. ADq — AEq :: AE. AT — AE. Hoc est EFq. DBq — EFq :: AE. ET. hoc est EFq. EGq :: AE. ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, sit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Estque $EFq = EOq(CPq) + OFq + 2EO \times OF(+ 2CP \times OF)$. Verùm ob $CP . CA :: OP . OF :: CE . OF$; est $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2CA \times CE$. item est $AEq = CEq + CAq - 2CA \times CE$; quapropter est $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc est $EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm est $CE . (PO) . PF :: CP . AP :: CP . CV$; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG est *hyperbola*, cujus centrum C; semiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, sumptáque $QR = AE$; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præsta sis fidem; aut ipse rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Positione datæ sint rectæ AC, BD (se intersecantes in X) quas decusset recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD secet punctis P, K) sit PL æqualis ipsi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, est $AQ . AP :: (BX . BK ::) QX . PL$: ergò linea ALL est recta.

XXVII. Positione data sit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX secet in M, & lineam DNN in N) sit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; sitque $DB . Z :: Z . DE$; & connectatur NE; Est jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$; quare $DM . DB :: DE . DN$. ergò triangula DBM, DNE similia sunt; quapropter angulus DNE rectus est; itaque linea DNN est circularis: (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; sed & suo modo rectam ac *circulum* sibi lineas esse reciprocas. Verùm hîc, etsi præludiis nostris nondum absolutis, paulùm subsistamus.

LECT. VII.

ADhuc in *Vestibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adsumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (versus Z); Fig. 61. secetur EG in F, ut sit $GE . EF :: NL . LM$; cadet punctum F ad partes MZ:

* 1 hujus. Nam est $NE . ME$ * $\sqsubset NL . ML :: GE . FE \sqsubset NE . PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ, item rectæ BD, GP parallelæ; Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore $DS . DT :: KG . LG$.

Nam est $KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + PT . PL = DB . DS + DT . DB = DT . DS$.

IV. Esto triangulum BDT, basíque DB parallelam quamvis PG intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$.

Fig. 63 Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est $DM . PD :: DB . TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter est $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, transponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè discursu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.
Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A.	B.	C.	D.	E.	F.
α.	β.	γ.	δ.	ϵ.	φ.
M.	N.	O.	P.	R.	S.
μ.	ν.	o.	π.	ρ.	σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, Co, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, ϵR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum est fore $D\pi = \delta P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint; hásque secet positione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sítque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX Fig. 65.

eodem semper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas esse; hoc est ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter se rationem habere; eandem scilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmisso consectatur, utì patebit, ad subjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} Sunt ∺. unde QR. QK :: PF. PE.

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD substitui possent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rursus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD positione data; item duæ curvæ EBE, FBF sic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, sit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ sit semper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rursus linea FEF ipsi KBK analoga; seu perpetim QR. QK :: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} sunt ∺. item QS. QL :: PG. PE. Et QI. QI :: PE. PE. } ergò QR. QK :: PF. PE.

Not. Pro rectis AB, AH, AD substitui possent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, sit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E describatur circulus HE; sitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, sit semper

DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR.DK :: DF.DE.

Nam rursus DS.* DR. *DI.
DL.*DK. *DI.
DG.*DF. *DE.
DE.*DE. *DE.
} sunt ∻. unde DR.DK :: DF.DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE; & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS.*DR*DI.
DL.*DK*DI
DG.*DF*DE
DE.*DE*DE
} sunt ∻; { Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D. A —: F :: N.M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A ± NX. & F = A ± MX. quare A —: D = NX. & A —: F = MX. unde A —: D. A —: F :: (NX.MX ::) N.M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

 bini,

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D . A —: F :: M —: P . M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim $A + N \sqsubset 2M$ (vel $\sqsubset$) $2B = A + C$. ergò $N \sqsubset C$. unde $M + N \sqsubset B + C = A + D$. Est autem $A + O \sqsubset M + N$. ergò $A + O \sqsubset A + D$. Et ideò $O \sqsubset D$. ergò $M + O \sqsubset B + D = A + E$. Est autem $A + P \sqsubset M + O$. ergò $A + P \sqsubset A + E$; adeóque $P \sqsubset E$. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F ∺ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint ∺ Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam si dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si $F = Q$; constat ex præcedente fore $E \sqsubset P$ (scilicet utramque seriem invertendo) sin $F \sqsubset Q$; potiori jure liquet fore $E \sqsubset P$.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O ; & hinc C ⊏ N.

XVII. Consectatur hinc ; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad positione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à designato puncto D projectâ D H ; sit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter easdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ VD, BD positione datæ ; sint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, sit P φ constantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter easdem media Geometricè ; quia jam (a) rectæ E G, E φ semper eandem obtinent rationem, est linea φ φ φ recta ; verùm linea V F F est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si P F sit inter ipsas P G, P E simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si P F sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam φ φ φ eodem ordine respondenti lineæ V F F *asymptoton* esse. quod an πρῦργυ fit nescio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâsse. Fig. 70. (a) 12 hujus.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam A C ductæ sint rectæ tres BA, BC, BQ ; tum in QC producta sumatur sumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci potest (ad alterutras ipsius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; sit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejusdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, si B R ultra angulum A B C jaceat respectu puncti D, fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas secans, ut vides ; & manifestum est, * è supra monstratis fore, F E ⊐ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat versus D ; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores sint interceptis à B Q, B A ; & sumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rursus utcunque ductâ D N, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema ; quoniam. * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) *Constr.* niam jam est K F (b) $\sqsupset$ N F; & K E * $\sqsubset$ M F; perspicuum est restare F E $\sqsupset$ N M.

Ità quidem ab una rectæ B Q parte recta B R duci potest, quæ minores ipsis M N intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis F E; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta D Z sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei B F C, cujus latera secet recta D B C; per E verò ducta sit recta E G; potest ab E recta duci (ceu E H) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ D K sit in hac à rectis E G, E H intercepta minor à rectis F C, F B interceptâ.

Ducantur E S ad F C, & E R ad F B parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum (a) 19. *hujus.* E N M, F K I) manifestum est fore M N $\sqsupset$ I K; (a) potest autem ab E duci recta (puta E H) talis, ut interceptæ P O minores sint interceptis M N; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur S L æqualis Fig. 74. ipsi C B; & connectatur E L; Estque jam I K . M N :: F K . E N :: (c) *Constr.* D F . D E :: F C . E S :: B C . R S (c) :: L S . R S (d) $\sqsubset$ Q N . (d) 6. Lect. VI. M N. quapropter est I K $\sqsubset$ Q N. (a) potest autem ab E recta duci, ceu E H, sic ut ab E G, E H interceptæ O P minores sint interceptis Q N. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam B A tangat recta B O in B; sitque recta B O æqualis curvæ B A; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta K O; erit K O major arcu K A.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est B K + K O $\sqsubset$ B O = B K + K A. ergò K A $\sqsubset$ K O.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ K L; erit K L + L O $\sqsubset$ K A.

Nam, supra contactum versus A, est K L + L O $\sqsubset$ K O $\sqsubset$ K A.

Infra verò, est K L + L B $\sqsubset$ K B (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque K L + L O $\sqsubset$ K A.

LECT. VIII.

Mihi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exigua Civitati portas ingentes extruxisse*. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (OMO. TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipsæ etiam lineæ OMO, TMT sese contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP sese contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contractum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT se mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F; sitque positione data recta FE; sint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta KL æqualis interceptæ IG; etiam curvæ EY, EZ sese contingent. Fig. 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta BEC; hunc utcunque secet ad FE parallela IL; sumatúrque GH = BC, & connectatur FH; sunt igitur è parallelis ad FE à rectis

FG,

F G, F H interceptæ pares interceptis ab E B, E C; hoc est minores interceptis à curvis E Y, E Z; hoc est minores interceptis à curva F X, & recta F A; quapropter angulus X F A rectilineo H F G major est; unde recta F A curvam F X non tangit, contra *Hypothesin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta F A curvam F X, & sint duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ I L (quæ lineas expositas secet ut vides) sit semper K L = I G; curvæ E Y, E Z sese tangent.

Nam, si neges, his interseratur *angulus rectilineus* B E C; quem utcunque à D projecta secet recta D L; (a) potest jam ab F recta duci (puta F H) talis, ut sint è projectis à D a rectis F G, F H interceptæ minores interceptis ab ipsis E B, E C, hoc est multo minores interceptis à recta E A, curváque F X. Unde sequetur angulum A F X rectilineo G F H majorem esse; ac idcircò rectam A F non contingere curvam F X, adversus *Hypothesin*.

(a) 10 Lect. VII.

Hæ præcedentes duæ Conclusiones veræ sunt, & simili ratione demonstrantur, posito interceptas I G, K L quamvis ad se perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Proposuimus hæc, ut sequentium nonnulla à scrupulis muniantur.

V. Sit recta V E I, duæque curvæ Y F N, Z G O sic ad se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad positione datam A B parallelâ, habeant interceptæ E G, E F semper eandem rationem inter se; tangat autem recta T G curvarum unam Z G O in G (cum recta V E conveniens in T) ducta T F alteram Y F N quoque continget.

Nam utcunque ducatur recta I L (lineas expositas ut vides intersecans) Est igitur I L . I N (a) ⊏ I O . I N :: E G . E F :: I L . I K. Igitur I N ⊐ I K. ergò punctum K extra curvam Y F N jacet; totáq; recta T F.

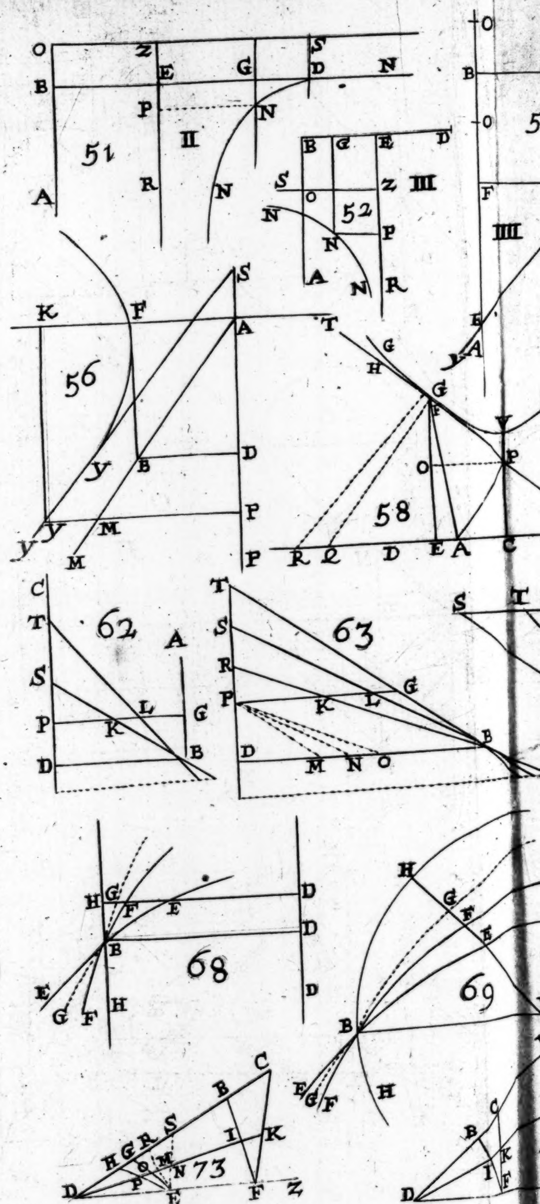
(a) Hyp.

Aliter. Est I L . I K :: (I O . I N :: I K — I O . I K — I N ::) O L . N K, ergò cùm lineæ G L, G O se (b) tangant, (c) etiam lineæ F N, F K sese tangent.

(b) Hyp.
(c) Schol. 4. hujus.

Fig. 80. VI. Etiam si tres curvæ X E M, Y F N, Z G O ità referantur ad se, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad positione datam parallelâ, sint semper E G, E F in eadem ra ione, concurrant autem duarum X E M, Z G O tangentes E T, G T in T; adjuncta T F curvam Y F N tanget.

Nam


51
52
56
58
62
63
68
69
73
3

Lect. VII.

81.

82.

Lect. III.
Lect. VI.
hujus.

83.

Cross sculpsit

Nam (facto ut priùs) erit I L . I K : : E G . E F : : M O . M N.
* quapropter erit punctum K extra curvam Y F N. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi ; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στενολεσχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ X E M, Y F N, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ D E F, habeant ad se rectæ D E, D F rationem semper eandem ; unam verò Y F N tangat recta F S ; cui parallela sit E R ; tanget recta E R curvam X E M. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta D K (lineas intersecans, ut vides). Estque D K . D I : : D F . D E : : D N . D M ; ergò quum sit D K $\sqsubset$ D N ; erit D I $\sqsubset$ D M ; quare tota recta R E extra curvam X E M cadit.

Rectæ N K, M I rationem semper eandem obtinent ; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ X E M, Y F N, Z G O tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ E G, E F rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ E T, G T curvarum duas (puta X E M, Z G O) in E, G ; oportet curvæ Y F N tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva T F V talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D M K L, (quæ secet rectas T E, T G punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ I L, I K rationem eandem datæ R ad S ; (a) est igitur I K $\sqsubset$ I N ; quare curva T F K curvam Y F N tangit ; (b) est autem curva T F K *hyperbola* ; hanc tangat F S ; (c) illa quoque curvam Y F N tanget.

(a) 2 Lect. VIII. (b) 4 Lect. VI. (c) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio ; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint V D recta linea, duæque curvæ X E M, Y F N ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ E D F ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex D E, D F par eidem alicui spatio ; tangat autem recta E T curvam X E M in E, cum recta V D concurrens in T ; sumatúrque D S = D T ; & connectatur F S ; hæc curvam Y F N tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur I N ad E F parallela ; lineas expositas se-

cans, ut vides. Estque TP . PM $\sqsubset$ (TP . PI : :) TD . DE item SP . PK : : SD . DF. ergò TP × SP . PM × PK $\sqsubset$ TD × SD. DE × DF : : TD × SD. PM × PN. Verum TD × SD $\sqsubset$ TP × SP; ac indè magis TD × SD . PM × PK $\sqsubset$ TD × SD. PM × PN. quare PM × PK $\sqsupset$ PM × PN; vel PK $\sqsupset$ PN. Itaque recta FS extra curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipsi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam sit punctum D; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF; sit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam verò curvam XEM tangat recta ER; alterius ad F tangens ità determinatur:
Fig. 84. Ducatur DP ad ER perpendicularis: factóque DP . Z : : Z . DB; bisecetur DB in C; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis; hæc curvam YFN tanget.

Nam centro C per F describatur *Circulus* DOB; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas intersecans, ut vides; estque DO ×
(a) 27 Lect. VI. DI (a) = DP × DB (b) = Zq (c) = DM × DN vel DO . DM : : DN . DI. ergò quum sit DM (c) $\sqsupset$ DI; erit DO $\sqsupset$ DN;
(b) Constr. itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem
(c) Hyp. YFN tanget.

XI. Curvæ XEM, YFN tales sint, ut ductâ quâpiam FE ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui; curvàm
Fig. 85. autem YFN tangat recta SF; huic parallela RE alteram XEM continget.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ est NI $\sqsupset$ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Reverà linea XEM nil aliud est, quàm ipsa YFN *translocata.* Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam XEM, quam tangat recta ER ad E; sit
Fig. 86. item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, sit semper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z; curvæ YFN tangens (ad F) ità designatur: Sumatur DH = Z; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipsi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela; sumatúrque GL = GB; erit connexa LFS curvæ YFN tangens.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas (*a*) *Convers.* 9. fecans, uti cernis. Estque Q O (*a*) = D P; (*b*) quare M O $\sqsubset$ D P Lect. VI. (*c*) $\sqsubset$ D H (*b*) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit. (*b*) *Hyp.* (*c*) *Elem.*

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (*d*) 9. *hujus.*

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (*a*) $\sqsubset$ Q I; erit Q K q — Z q $\sqsubset$ Q I q — Z q; hoc est Q H q $\sqsubset$ Q G q; ergò curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) est autem curva V F H *hyperbola*; quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget. (*a*) *Hyp.* (*b*) 22. *Lect.* 6. (*c*) *Cor.* 22. Lect. VI.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q. P F q :: P T. P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q; erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (*a*) $\sqsubset$ Q I q, erit ideò Q O q $\sqsupset$ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (*b*) Est autem (ex ostensis) (*a*) *Hyp.* (*b*) 24. Lect. VI.

ostensis) curva O G O *Ellipsis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90.

XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) sit etiam alia curva V G C ad istam sic relata, ut à designato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, sit E G æqualis ipsi Z F; sit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; sumatúrque Q R æqualis ipsi Z E; connexa recta G R ipsi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipsam F Q perpendicularis, seu curvam AFB tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O secet punctis H, K, O) connexâque Z K, sit H O = Z K; tum ductâ Z I, quoniam H K (a) ⊏ H I, erit Z K ⊏ Z I, vel H O ⊏ H L; quare curva O G O curvam V G C tangit. (b) Est autem O G O (ex ostensis) *Hyperbola*, cui perpendicularis est recta G R; eadem itaque GR curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(a) *Hyp.*
(b) 25 Lect. VI

Fig. 91.

XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad positione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas secet, ut perspicis) connexâque rectâ D Y, sit semper R Y . D Y : : D Y . E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam designare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O secet punctis G, P, O) connexâque D O sit semper G O . D O : : D O . P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam secet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos ODP, DGP æquari; quare cùm angulus D S P major sit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; est autem curva DYO *hyperbola* (a) superiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(a) 12 Lect. VI.

Not. Si curva D R S sit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *cissois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis similiter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92.

XVIII. Positione datæ sint rectæ D B, B K; sitque curva D Y X

talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum RDY triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D : : (D H. H B) : : Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (*a*) = D I) ⊐ (*a*) (D L (*b*) =) O N, ergò *hyperbola* NXN curvam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget.

a) Constr.
(b) Converʃ. 9. Lect. VI.

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

Lect. IX.

Quod ingressi sumus iter actutùm rectà prosequemur.

I. Sint rectæ A B, V D sibi parallelæ; quas secat positione data Fig. 94. D B; transeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad se relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine designato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) designare.

(a) 12. Lect. VII. Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (a) explicuimus supra) exponentes; fiátque N . M :: D S . D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

(b) 11. Lect. VII. (c) Constr. (d) 3. Lect. 7. (e) Hyp. Nam utcúnque ducta sit recta P G, dictas lineas secans, uti cernis: Estque F G . E G (b) :: N . M :: (c) D S . D T :: (d) L G . K G; cùm ergò (e) sit K G $\sqsupset$ E G; erit L G $\sqsupset$ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam consistere.

II. Reliquis perstantibus iisdem, sit jam PF inter PG, PE media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

(a) 17. Lect. 7. Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo constructæ lineæ sese mutuò (a) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è sex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S . D T :: 3 . 7.

Fig. 95. III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypothesi, sumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta simili pacto designatur.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipsam D B parallela, secans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N . M ::

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY ; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectásque C E, V P in I ac Q secante) sit semper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam constat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (a) analoga est curva F B F ; (b) ergò recta F Y curvam F B F quoque continget. a 7. Lect. 7. b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, posito lineam E B E rectam esse, quòd linea FBF parabolarum seu paraboliformium aliqua sit. quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè consectatur ; si T D sit recta, síntque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad se relatæ, ut ductis rectis P E F ad positione datam B D parallelis, sint ordinatæ P E semper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hasce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quòd si ordinatæ PE se habeant ut ipsarum PF cubi, erit TP = 3 S P ; si P E sint ut quadrato quadrata ipsarum P F , erit T P = 4 S P ; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B transeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, sit semper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) designare. Fig. 97.

Hoc (certè (a) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hîc speciatim apertiùs atque plenius exequi : Quorsum sit D Q ad D B perpendicularis, quam secet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget. a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; secentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut sit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; perque puncta X , Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *asymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas Fig. 97.

inter-

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK . PL :: (*a*) M . N :: (*b*) GE . GF (*c*) ⊏ PE . PF ⊏ PK . PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ . ZB :: BS . ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS . SX :: (*d*) BS . SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ . CX :: DS . ST; compoſitéque RZ . RZ + CX :: DS . DT :: (*d*) N . M :: CZ . CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ . CX :: CZ . CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

a Converſ. 4. Lect. VI.
b 11. Lect. VII.
c 1. Lect. VII.
d Conſtr.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem quì priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX . DY :: N . M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (*a*) analoga eſt curva FBF; (*b*) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

a 9. Lect. VII.
b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF

DEF concurrentes punctis S, T; erit semper $DT = 2DS$. Quòd si DE sunt ut cubi ipsarum DF, erit semper $DT = 3DS$; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decusset positione data recta DB; transeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, sit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE; oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus sunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \left.\begin{matrix}+M\\-N\end{matrix}\right\} \times RD \,.\, M \times TD :: RD \,.\, SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta sit PG, dictas lineas secans ut vides. Estque $EG \,.\, FG :: (a)\ M \,.\, N$. ergò $FG \times TD \,.\, EG \times TD :: N \times TD \,.\, M \times TD$. Item $EF \times RD \,.\, EG \times TD :: M - N \times RD \,.\, M \times TD$. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit $FG \times TD + EF \times RD \,.\, EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD \,.\, M \times TD$, (hoc est) $:: (b)\ RD \,.\, SD$. (c) Est autem $LG \times TD + KL \times RD \,.\, KG \times TD :: RD \,.\, SD$. quare $FG \times TD + EF \times RD \,.\, EG \times TD :: LG \times TD + KL \times RD \,.\, KG \times TD$. hinc, cùm sit $EG\ (d) \sqsubset KG$; erit $FG \times TD + EF \times RD \sqsubset LG \times TD + KL \times RD$; vel $FG \,.\, EF + TD \,.\, RD \sqsubset LG \,.\, KL + TD \,.\, RD$; seu (demptâ communi ratione) $FG \,.\, EF \sqsubset LG \,.\, KL$. vel componendo $EG \,.\, EF \sqsubset KG \,.\, KL\ (e) \sqsubset EG \,.\, EL$. unde est $EF \sqsupset EL$. itaque punctum L extra curvam FBF situm est; adeoque liquet Propositum.

(a) 11. Lect. VII.
(b) Constr.
(c) 4. Lect. VII.
(d) Hyp.
(e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si PF supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF sit è sex mediis tertia, seu $M = 7$; & $N = 3$; erit $3\,TD + 4\,RD \,.\, 7\,MD :: RD \,.\, SD$; vel $SD = \dfrac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, secans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiatque $N \times TP \left.\begin{matrix}+M\\-N\end{matrix}\right\} \times RP$. Fig. 101.

M × T P :: R P . S P ; & connectatur S F ; hæc curvam F B F tanget ; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus ; tantùm hìc (non per E ad V D parallela ducitur, at) connectitur E T ; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, si linea E B E sit recta, (rectæ nempe B R coincidens) esse lineam F B F ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modùm uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P) cadant ; curvæ F B F tangens (B S) designatur faciendo N × R D —: M } — N } × T D . M × T D :: R D . S D. (Fig. 102.)

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam E B E rectam esse, lineæ B R coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

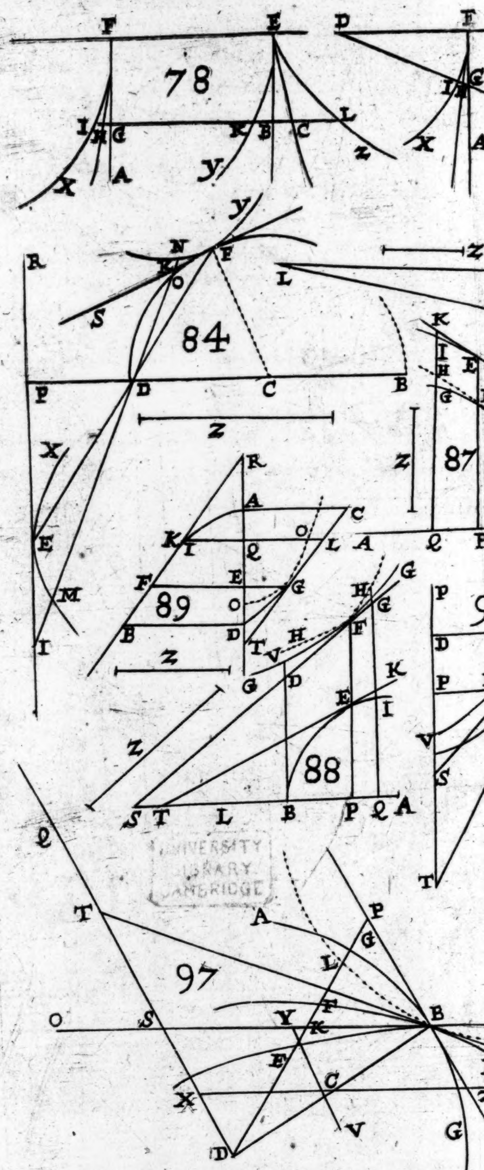
Exemplum. Si P F sit è quatuor mediis quarta, seu M = 5 ; & N = 4 ; erit $S D = \frac{5 \, T D \times R D}{4 \, R D - T D}$.

Notetur; Si contigerit esse N D × R D = M } — N } × T D, esse D S infinitam ; seu B S ipsi V D parallelam. Alia possent adnotari ; sed relinquo.

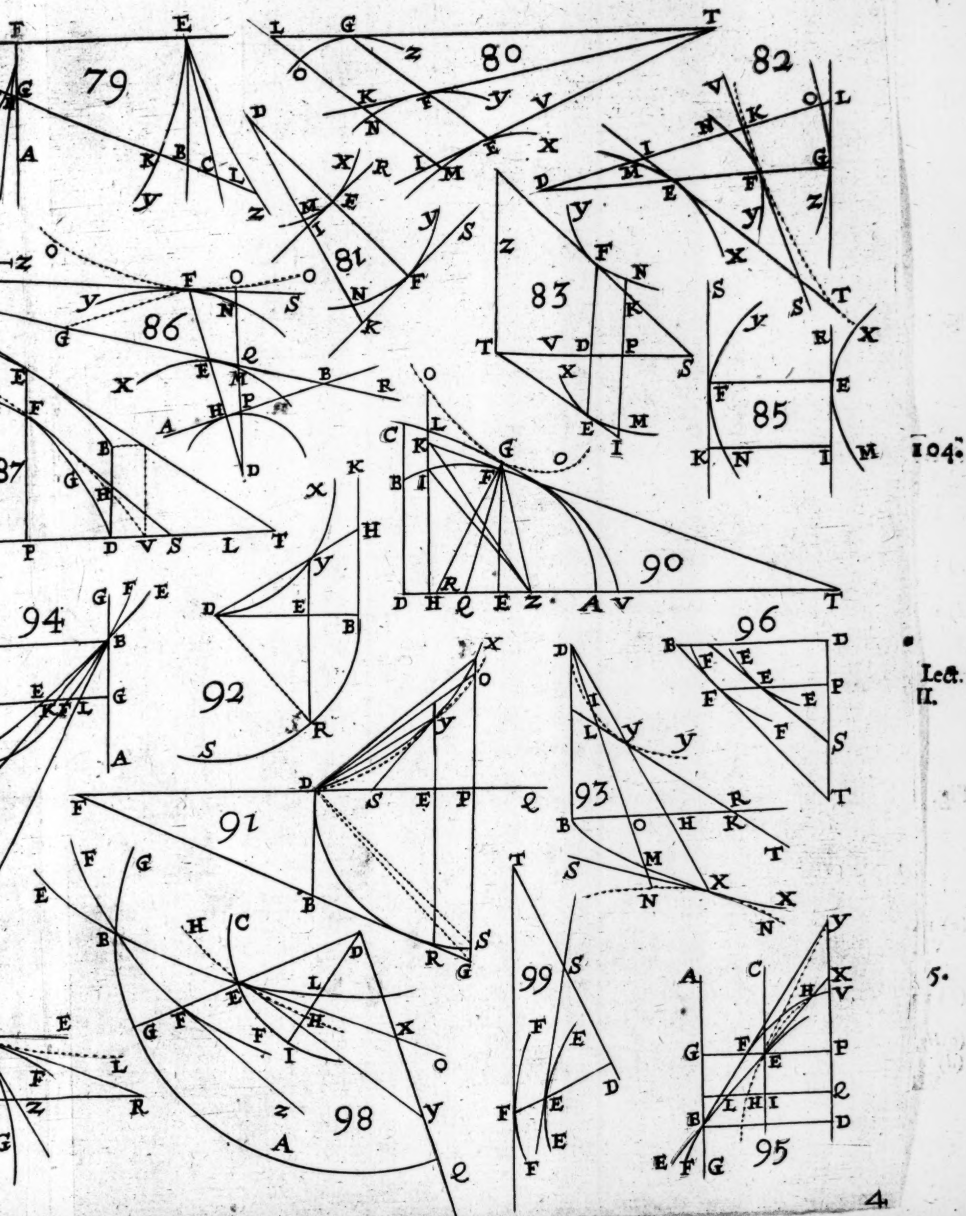
XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois* & *Cissoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique semirectus angulus D S B ; curvæque duæ S G B, S E E sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ G E ad B D parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint P G, P F, P E continuè proportionales ; tangat autem recta G T curvam S G B in G, reperietur quæ ad E lineam SEB tangit, faciendo 2 T P — S P . T P :: S P . R P ; utique connexa R E curvam S E E tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva S G B sit circulus, & applicationis angulus S P G (Fig. 103.)

sit

Fig



Cross sculpsit



104.

Lect. II.

5.

sit rectus, erit curva S E E *Cissois vulgaris*, seu *Diocleæ*; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam amplius vos detinebo.

LECT. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad positione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G secet in E, curvámque A F I in F) sit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, sitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propositas secans, ut cernis; éstque $GK = GH + HK = GH + HT$ (*a*) $\sqsubset$ arc. $AG = GI$; unde punctum K extra curvam A F I situm est; adeóque recta T K ipsam tangit. (*a*) 22 Lect. VII.

II. Quòd si recta E F quamlibet ad arcum A E rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestè consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque designatum D; sit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, sit semper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) designare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; sitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F secet in K, rectámque T E in H)

 sit

(a) 17 Lect. VIII. fit semper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F, hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 22. Lect. VII. Est enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106. V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA; & sit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 22. Lect. VII. (b) 26. Lect. VI. * Hyp. (c) 3 Lect. VIII. (d) 2. Lect. VIII. Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) ⊏ arc. AEG * = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107. VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII. Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(b) 22. Lect. VII. (c) Hyp. (d) 4. Lect. VIII. Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper DL = TH + HG; est itaque DL (b) ⊏ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent. item curvæ KFK,

LFK

LFK sese contingunt. (*e*) quare curvæ D I F, K F K se quoque contingent. (*e*) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (*e*) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd si rectæ D F quamvis aliam constanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem designari potest recta curvam D I F tangens, ex hac, & septima octavæ Lectionis; erit utique tangens ista huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *spiralis circularis*, ast innumerabilium simili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H positione data; sit item curva A G B talis, ut in hac assumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H secet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F assignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta designetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O secet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, sit V L. A Q : : X . Y; estque curva O G O (è supra monstratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc secet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductáq; sit N R ad G F parallela, sit V L + L K. A R : : X . Y; manifestum est curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [secet enim recta D L curvam A E B in I, ducatúrque I P ad G F parallela; quum ergò sit V L + L K. A R : : X . Y : : A K. A P. & sit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B semper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; similique planè discursu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O sese (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H sit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium simili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto designatur.

Hujusmodi

Hujusmodi plura quædam cogitaram hîc inserere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque crescant; sit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis E, F, ipsam V D in D) sit semper *rectangulum* ex D F, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) éstque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) L F × R æquale spatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde est L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Fig. 110.

Rursus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; similíque jam planè discursu constabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (seu extra) curvam V I F I existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea V I F concavas suas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari spatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipsarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, sit semper quadratum ex D E æquale *duplo spatio* V D E Z; sumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F transiens, talis qualem mox attigimus (cujus scilicet ad V D applicatæ se habeant ut spatia VDEZ; hoc est ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præsente hypothesi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tângat recta (a) 5. Lect.
F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = VDEZ. IX.
ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F D q. unde constat angulum (b) Cor. praec.
Q F S rectum esse. quod Propositum erat.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, DE, &c. ab initio D A continuò decrescant) Fig. 112. tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 GDE ⊏ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⊏ E X ⊏ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⊏ D L = D K; ergò magìs punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E, versus Z; estque rursus, utì priùs, R L × D E = 2 G D E ⊐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⊐ E X ⊐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò ostensis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipsam D K E continget.

Notetur esse DGq . DKq :: 2 R . DS .

Nam est DGq . DKq = DG . DK + DG . DK = R . P + DT . DS = R . P + 2 P . DS = 2 RP. P × DS = 2 R . DS . itaque DGq . DKQ :: 2 R . DS.

Hæc autem perinde vera sunt, nec absimili modo demonstrantur; etiam si projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares sint (quo casu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedaa*) aut à D A continuò crescant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità versus se relatæ, ut à designato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum Fig. 114. hæc ipsam D K E secet in K) sit semper *Quadratum* ex D K *Quadruplum spatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G :: D G . D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K transiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (seu DK) se habeant in eadem quâ spatia ADG ratione (quales lineas attigimus in proximè superiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæ cum ipsa H D punctis T, S; est igitur (è præcedente) D G q. D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T . hoc est D H . D K :: $\frac{DK}{2}$ D T ; hoc est (quoniam è * mox præmonstratis D S = 2 D T) D H . D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem esse: Q. E. D.

* In 12. hujus.

Ità Propositi nostri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti sumus. Cui supplendæ, appendiculæ instar, subnectemus à nobis usitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud scio, post tot ejusmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex usu sit facere. Facio saltem ex Amici consilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendiosa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M positione datæ rectæ lineæ (quarum P M propositam curvam secet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P secare ad T; ut ipsius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum statuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P $= m$; P T $= t$; M R $= a$; N R $= e$; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem M R, N R (& mediantibus illis ipsas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipsam m; (vel M P) pro e ipsam t (vel *P T*) substituo. Hinc demùm ipsius P T quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clariùs elucescent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus sit; & sit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H secet in K, curvam A M O in M, sit semper subtensa A M æqualis abscissæ B K; hujus curvæ ad M tangens est designanda.. Fig. 116.

Fiant quæ suprà præscripta sunt, & (ductâ A N L) nominetur A B $= r$; & A P $= q$; unde A Q $= q - e$; item Q N $= m - a$. ergò est $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma =$ (A Q q + Q N q $=$ A N q $=$) B L q; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma =$ B L q. Porrò est A Q. Q N :: A B. B L; hoc est $q - e . m - a :: r .$ B L $=$ $\frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} =$ B L q; seu (rejectis superfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} =$ B L q $= qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus

M abjici-

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò substituendo m pro a, & t pro e, est $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel

$$\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT.$$

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta E A (positione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Nominentur A E $= r$; A P $= f$; unde A Q $= f + e$; & A Q cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) $= f^3 + 3ffe$. Item N Q cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc est) $= m^3 - 3mma$. Quapropter est $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (A Q cub. + N Q cub. $=$ A E cub. $=$) r^3. abjectisque datis, est $3ffe = 3mma = o$. seu, $ffe = mma$; subrogatisque loco a, & e ipsis m, & t, erit $fft = m^3$; seu $t = \frac{m^3}{ff}$; est ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit A P q q + M P q q $=$ A E q q; reperietur fore P T $= \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatu dignum sit nescio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Positione data sit recta A Z, & A X magnitudine; sit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, sit A P *cub.* + P M *cub.* $=$ A X × A P × P M.

Dicantur A X $= b$; & A P $= f$; ergò A Q $= f - e$; & A Q *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & Q N *cub.* $= m^3 - 3mma$. & A Q × Q N $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde A X × A Q × Q N $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; seu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; substituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; seu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductísque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus CB $= p$; radius AC $= r$; recta AP $= f$; AM $= k$. Estque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. hoc est, $r . p :: a . \frac{pa}{r} =$ arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc est, $k . m :: r . \frac{rm}{k} =$ EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc est $r . \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} . \frac{pma}{rk} =$ LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc est $k . r :: f . \frac{rf}{k} =$ AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} =$ AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $=$ ALq; adeóque LF$q = \frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$. Fig. 119.

Est autem AQq. QNq :: ALq. LFq; hoc est Q: $f - e$. Q: $m + a$ :: ALq. LFq. hoc est $ff - 2fe . mm + 2ma :: rrff - 2fmpa . rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *præscriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam AT $= \frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, AV $= \frac{rr}{p}$) erit AT $= \frac{AMq}{AV}$; seu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque sumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectâque P M ad A V normali, sit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

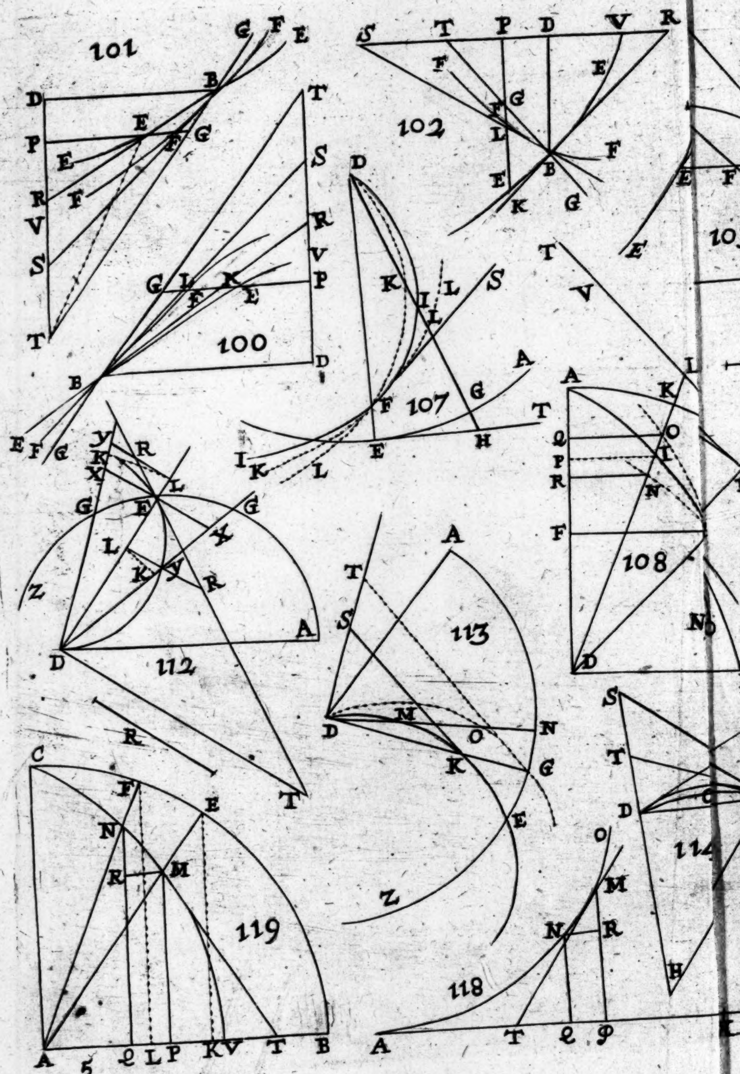
Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demissis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam est C E . E K :: arc. E F . L K; vel C E . E K :: Q F . L K; hoc est $r . g :: e . \frac{ge}{r} =$ L K; erit C L $= f + \frac{ge}{r}$. Et L F $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem C L . L F :: (C B . B H ::) C B . Q N. hoc est, $f + \frac{ge}{r} . \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} . gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq}$ BG $=$ $\frac{CKq}{CEq}$ B G.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.

Fi



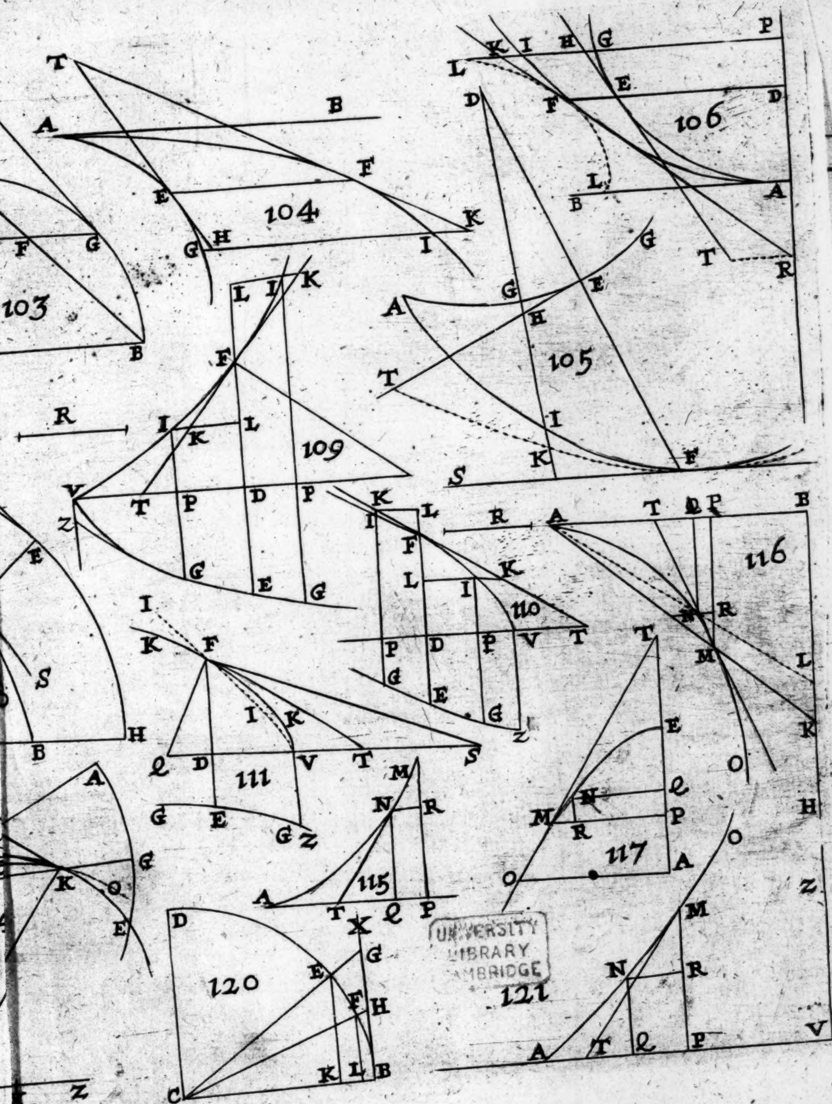


Fig. 122.

Fi

Lect. XI.

Reliquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (seu è perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata*; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea ε Z ψ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, & recta EAZ ad axem perpenicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis, erit *spatium* A D ψ φ *æquale semissi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus; & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ; curvæ occurrentes in E, F, G; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint; lineæ verò se intersecent; ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro rectâ haberi potest) quare HL. LG :: P D. D H. adeóque H L × D H = L G × P D; hoc est H L × H O = D C × D ψ. Simili monstrabitur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z; & similiter K I × K Y = B A × B Z; itidem denuò I D × I Y = A V × A Z; unde constat triangulum H D O (quod a rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ψ φ (quod itidem a rectangulis D C × D ψ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt); hoc est $\frac{DHq}{2}$ æquari spatio V D ψ φ.

Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum?

II. Iisdem

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex base DH.

Fig. 122.

Nam ob HL . LG :: PD . DH :: PD × DH . DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D♆ × DH. Similíque discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari τῷ $\frac{DHqq}{4}$; & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. &c. = $\frac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD♆φ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD♆φ semiquadrato.

Fig. 122.

Nam (utì priùs ostensum) figuræ VD♆φ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum, ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium VAZφ = $\frac{AEq}{2}$; & VBZφ = $\frac{BFq}{2}$; & VCZφ = $\frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$ (*c*) hoc est τῷ $\frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est τῷ $\frac{VD♆φ \times VD♆φ}{2}$.

Præced. Lect. X.
(*b*) 1 *hujus.*
Fig. 122.
(*c*) 3 *hujus.*

V. Quòd si ducantur omnia √VAZφ, √VBZφ, √VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD♆φ cubato (τῷ $\frac{2}{3}$ √VD♆φ³)

Nam adaptatâ curvâ VH, est √VAZφ = AE √$\frac{1}{2}$; & √VBZφ = BF √$\frac{1}{2}$, & VCZφ = √CG √$\frac{1}{2}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, *&c.* $= \frac{DH\ cub.}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* $= \frac{DH\,cub}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2\,VD\psi\varphi$, vel $DH^6 = 8\,VD\psi\varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, *&c.* $= \sqrt{\frac{8}{18} VD\psi\varphi^3} = \frac{2}{3} \sqrt{VD\psi\varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\psi$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, *&c.* in sinus rectos AZ, BZ, CZ, *&c.* ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, *&c.* $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD\psi$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9} VDq \times A\psi q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{27} VD^3 \times D\psi^3}\ \sqrt{\frac{32}{243} VD^3 \times D\psi^3}$.

Similia plura de factis è *Segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, *&c.* Concipiantur applicatæ, puta út AY, BY, CY, *&c.* respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* $AD\xi\theta$ *æquale semisse quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, *&c.* $= \frac{VDq}{2}$; & omnes $AP + BP + CP$ *&c.* $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *solidum factum ex spatio*

ſpatio VD$\psi\varphi$ *circa axem* VD *rotato ſubduplum ſolidi ex ſpatio* DRSH, *itidem circa axem* VD *rotato, confecti.*

Nam ob HL . LG : : PD . DH : : Dψ . DH : : Dψq . Dψ × DH : : Dψq . HS × DH; erit HL × HS × DH = LG × Dψq. = DC × Dψq. Simili planè diſcurſu erit LK × LX × DL = CB × CZq; & KI × KX × DK = BA × BZq, &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\varpi}{\delta}$: AZq + BZq + CZq, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{2\varpi}{\delta}$: DI × IX + DK × KX + DL × LX, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva VEH rectæ VD convexas ſuas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ductâ EP ad curvam VEH perpendiculari, & EAY ad rectam VD normali, factâque AZ = AP; erit ſpatium VDψ = $\frac{DHq;}{2}$ Sin quoque fiat AY = VP; erit ſpatium VDξ = $\frac{VHq.}{2}$ Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam VH (cujus axis VD, baſis DH) & linea DZZO talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ ET, quæ curvam tangat, & recta EIZ ad baſin parallelâ, ſit qerpetuò IZ æqualis ipſi AT; dico *ſpatium* DHO *ſpatio* VDH *æquari.*

Æquiſecetur enim recta DH indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ EIZ, FKZ, GLZ ad VD parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ EA, FB, GC ad HD parallelæ, rectæque ET, FT, GT (ut & HT) *curvam tangentes*; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum GLH ſimile triangulo TDH (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus GH rectæ inſtar cenſeri poteſt, eatenus tangenti HT coincidens) quare LG . LH : : TD . DH; & LG × DH = LH × TD; ſeu CD × DH = LH × HO. ſimili ratiocinio eſt BC × CG

CG = KL × LZ, & AB × BF = IK × KZ, & VA × AE = DI × IZ. Verùm summa CD × DH + BC × CG + AB × BF + VA × AE à spatio VDH minimè differt; & summa LH × DO + KL × LZ + IK × KZ + DI × IZ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est HL. LG :: (DH. DT :: DH. HO ::) DHq. DH × HO. unde HL × DH × HO = LG × DHq = CD × DHq. Similíque discursû sunt LK × DL × LZ = BC × CGq. & KI × DK × KZ = AB × BFq. & demum ID × DI × IZ = VA × AEq. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa CD × DHq + BCB × CGq + AB × BFq + VA × AEq dupla summæ DI × IE + DK × KF + DL × LG, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR converso factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD converso producitur.

XII. Hinc, summa DI × IZ + DK × KZ + DL × LZ, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis AEq + BFq + CGq, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam DIq × IZ + DKq × KZ + DLq × LZ, &c. triplam esse summæ DIq × IE + DKq × KF + DLq × LG, &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotatò duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob VA × AE = DI × IZ, erit VA × AE × EI = DI × IZ × IE = ID × IXq. Similíque de causa AB × BF × FK = IK × KXq; & BC × CG × GL = KL × LXq, &c. Est autem summa VA × AE × EI + AB × BF × FK + BC × CG × GL, &c. Subdupla sum- *In 10. hujus.*

mæ V D q + E I q + F K q + G L q; ergò summa I X q + K X q + L X q + H X q, subdupla est summæ V D q — E I q + F K q + G L q. Unde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva D X H talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu I X, inter congruas ordinatas I E, I Z bimedia *; erit summa cuborum ex I X, K X, L X, &c. subtripla cuborum ex D V, I E, K F, &c. Sin I X sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea V Y Q talis, ut ordinata A Y ipsi A T, & ordinata B Y ipsi B T, &c. æquentur; erit I Z q + K Z q + L Z q, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva D Z O ad rectam D H) æqualis summæ V A × A E × A Y + A B × B F × B Y + B C × C G × C Y, &c. (hoc est figuræ V D H in figuram V D Q ductæ).

XVII. Item, summa I Z. cub. + K Z cub. + L Z cub. &c. = V A × A E × A Y q + A B × B E × B Y q + B C × C G × C Y q, &c. *hoc est figuræ* V D H *in figuræ* V D Q *quadratum ductæ*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

Fig. 126. XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur, Etiam si curvæ V H convexa rectæ V D obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva V H punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad V D parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spa- D H O circa axem V R converso duplum erit solidi ex spatio V D H circa eundem axem V D rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX Porrò, sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, & huic perpendicularis B D; tum alia sit linea K Z L talis, ut sumpto in curva A B utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ M T curvam A B tangente, rectâ M F Z ad D B parallelâ (quæ lineam K L secet in Z, rectam A D in F) datâque quadam lineâ R; sit T F. F M :: Fig. 127.

R.

R . F Z ; erit spatium A D L K æquale rectangulo ex R, & D B.

Nam sit D H = R ; & compleatur rectangulum B D H I ; tum assumptâ M N indefinitè parvâ curvæ A B particulâ ducantur N G ad B D ; & M E X, N O S ad A D parallelæ. Estque N O . M O : : T F . F M : : R . F Z. Unde N O × F Z = M O × R ; hoc est F G × F Z = E S × E X. ergò cum omnia rectangula F G × F Z minimè differant à spatio A D L K ; & omnia totidem rectangula E S × E X componant rectangulum D H I B, satis liquet Propositum.

XX. Iisdem positis, sit curva P Y Q talis, ut sumpta in sumpta recta M X ordinata E Y (respectivæ) ipsi F Z æquetur, erit *summa quadratorum* ex F Z (ad rectam A D computata) par ei quod fit ex ipsa R in *spatium* D B Q B ducta.

Est enim F G . E S : : N O . M O : : R × F Z . F Z q : : R × E Y . F Z q. adeóque F G × F Z q = E S × R × E Y.

XXI. Simili ratione *summa Cuborum* ex F Z æquatur ei quod fit ex R in summam quadratorum ex rectis E Y ad B D applicatis. neque non simili quoad reliquas potestates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis D O K, in qua designatum punctum D ; & subtensa recta D K ; sit item curva A E talis, ut à D projectâ quâvis rectâ D M F (quæ curvas secet punctis M, F) ductísque D S ad D M normali, & M S curvam D O K tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, sit D S . 2 R : : D M q . D F q ; erit spatium A D E æquale ex R, D K.

Nam subtensa D K indefinitè secta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C descripti transeant arcus P M, Q R N ; curvam D O K secantes punctis M, N ; per quæ ducantur rectæ D M F, D N G ; sint verò D T ad D K ; & D S ad D M perpendiculares ; quibus occurrant tangentes K T, M S. demùm centro D per E ducatur arcus E X ; & per F arcus F Y. Jam, ob sectionem indefinitam, est triangulum K P M triangulo K D T simile. ac ideò M P . P K : : T D . D K. item est D P . P M : : D E . E X. seu, propter assignatam causam, D K . M P : : D E . E X. Est itaque M P × D K . P K × M P : : T D × D E . D K × E X. hoc est D K . P K : : T D × D E q. D K × E X × D E. ac inde D K q × E X × D E = P K × T D × D E q. (*a*) Est autem D T . 2 R : : D K q . D E q ; seu D T × D E q = 2 R × D K q. ergò est D K q × E X × D E = P K × 2 R × D K q. quare E X × D E = 2 R × P K ; hoc est, 2 sector D E X = 2 R × P K. unde sector D E X = R × P K. Simili planè discursu sector D F Y (*a*) *Hyp.*

æquatur

æquatur ipsi R × RM, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit DE = √ DK × DH; & DF = √ DM × DI; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX; hoc est DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ. quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam Xk, distantiásque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ kd, md, nd, &c. pares

pares

pares subtensis KD, MD, ND; &c. erit spatium X $k\,d$ æquale spatio DKI.

Nam est KM.KP::KT.KD; hoc est km.KP:: KI.kd. unde $km \times kd =$ KP × KI. Similíque pacto, MN.MR::MS.MD. seu mn.PQ:: PZ.md. unde $mn \times md =$ PQ × PZ. ac ità deinceps. unde cònstat Propositum.

XXVI. Sin porrò, persistentibus reliquis, adsumptâ quâvis rectâ kg, completóque rectangulo Xkgb, curva DZI talis intelligatur, ut sit MD.MS:: kg.PZ; erit rectangulum Xkgb æquale spatio DKI. Fig. 130.

Nam est rursus KP.KM::KD.KT:: kg.KI. adeóque KP × KI = (KM × kg =) $km \times kg$. Similitérque PQ × PZ = $mn \times kg$. ac ità semper. Unde constat.

Hinc noto spatio DKI cognoscetur quantitas curvæ DOK.

Hujusmodi verò complura deprehendet quisquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excusserit. Faciat cui id vacat & adlubescit.

XXVII. Usui fortè nonnunquam erit (mihi subinde fuit) & hoc, è præmissis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, basis DH) quam tangat utcunque recta ET; & ducatur EA ad HD parallela. tum altera statuatur curva GZZ talis, ut à puncto E ductâ rectâ EZ ad VD parallelâ (quæ basin DH in I, curvam GZZ in Z secet) adsumptâq; quâpiam determinatâ R, sit semper DAq.Rq::DT.IZ; erit DA.AE::Rq.spat. DIZG. (vel facto DA.R::R.DP; ductâque PQ ad DH parallelâ, erit *Rectangulum* DPQI par *spatio* DGZI).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam usui futurum.

XXVIII. Sit curva qualibet AMB (cujus axis AD); sit item linea KZL proprietate talis, ut sumpto in AMB quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ MP ad curvam AB perpendiculari (quæ axem AD secet in P) & rectâ MG ad AD perpendiculari (quæ curvam KZL secet in Z) sit constantèr GM.MP:: arc AM.GZ; erit *spatium* ADKL æquale *semissi quadrati* ex arcu AM. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò sufficiat admonitum; etenim hic animus est paulò subsistere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. Cum pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii, Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi; quin & præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD. Fig. 133.

III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) itâ se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc Fig. 134.

ipsam

ipsam A F B) sit perpetuo T G major quàm S G; *dico nullam curvæ* A F B partem intra ipsam A E B cadere.

Si fieri potest, cadat pars N F M; ità scilicet ut curva A F B curvam A E B intersecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; sint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipsas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R secet punctis X, Y; sit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex ostensis patet esse *spatium*

$$IHKL = \frac{HMq - INq}{2} = \text{spat.} IHQR;$$ adeóq; spat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX) : : SG; GE. ⊐ SG. GF ⊐ TG. GF : : GF. GP (GY) ⊐ GE. GY; est G X ⊏ G Y; adeòque (cùm hoc ubique similiter contingat) spatium I H K L majus spatio IHQR; quod repugnat ostenso. itaque liquet Propositum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc usquam intersecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata basis A D E; segmenti verò B A E centrum gravitatis sit punctum H, qer quod ducta sit recta R S ad B E parallela Porrò per puncta R, S transeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E secans, ut ejusce pars superior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores verò reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit segmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, versus basin M N. Fig. 135.

Nam è segmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P residuum B R K A P S E deprimet versus basin B E, puta ut jam sit hujus residui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magìs deprimet; adeóque centrum ejus infra X consistet, velut ad Y. itaque constat Propositum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S *Diametro* C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares sint rectæ B D, E P; sit autem A D major quàm A P; erit T D. AD ⊏ S P. A P. Fig. 136.

Nam est C T. C A : : C A. C D. Ideoque CT − CA. CA − CD : : CT. CA, hoc est TA. AD : : CT. CA. Simili ratione constabit esse S A. AP : : CS. CA. Est autem C T. CA ⊏ CS. CA. quare T A. AD ⊏ S A. A P. vel componendo T D. AD ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* A E B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ

Fig. 137. B T, E S, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit T D : A D $\sqsupset$ S P . A P.

Nam est C A . C D :: C T . C A . unde C A — C T . C D — C A :: C T . C A; hoc est T A . A D :: C T . C A. suppare discursu, est S A . A P :: C S . C A. Verùm est C T . C A $\sqsupset$ C S . C A. quare T A . A D $\sqsupset$ S A . A P; seu componendo T D . A D $\sqsupset$ S P . A P.

VII. *Circuli* A E B (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* A F B communes sint axis A D, & basis B D; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & A D = $\frac{m - 2n}{m - n}$ C A (vel $m - n . m - 2n$ :: C A . A D) *circulum* verò tangat recta B T; hæc quoque *paraboliformem* A F B continget.

Fig. 138. Nam quia B T *circulum* tangit, est C T . C A :: C A . C D; unde T A . A D :: C A C D. componendóque T D . A D :: C A + C D . C D. Item, quoniam est (ex hypothesi) C A . A D :: $m - n . m - 2n$; erit per rationis conversionem C A . C D :: $m - n . n$. & componendo C A + C D . C D :: $m . n$. hoc est T D . A D :: $m . n$. unde (a) palàm fit,

(a) 2 hujus ap. quòd B T *paraboliformem* A F B tangit.

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius A D ad C A designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* A E B ad B continget. Nempe, si A D = $\frac{s}{t}$, erit $\frac{t - s}{2t - s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m - n . m - 2n :: t . s ::$ C A . A D. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* A F B extra *circulum* A E B tota cadet.

Fig. 139. Nam utcunque ducatur recta G E F ad D B parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ E S *circulum*, & recta F R *paraboliformem* contingentes; Estque

R G.

RG. AG :: (a) m . n :: TD . AD (b) ⊏ SG . AG. quare RG ⊏ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (a) 2. hujus. app. (b) 5. hujus ap. (c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; eſt VP. AP ⊐ SG. AG ⊐ RG. AG :: m . n; (a) itaque rurſus liquet Propoſitum. (a) 3. hujus ap.

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (a) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt. (a) 3. hujus ap.

XII. Porrò, *Hyperbolæ* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; ſit autem AD $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam eſt CD.CA :: CA.CT. ac indè AD.TA :: CD.CA; inverſéq; componendo TD . AD :: CA + CD . CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m - n . 2n - m$ :: CA . CD; adeoque inverſè componendo CA . CD :: $m - n . n$; & rurſus componendo CA + CD . CD :: $m . n$. hoc eſt TD . AD :: $m . n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſù datà ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit AD $= \frac{s}{t}$ CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (ϲαυρηδὸν

O mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ CA . AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Estque SG . AG :: (a) $m . n ::$ TD . AD (b) $\sqsupset$ RG . AG. unde RG $\sqsubset$ SG. (c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(a) 2. hujus ap.
(b) 6. hujus ap.
(c) 3. hujus ap.

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes

Fig. 141. ipsâ GE superiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Nam si in *curva hyperbolica* AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP . AP $\sqsubset m . n$. adeoque rursus è tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD in-

Fig. 141. tercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eò, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbola* non occurrit, patet; quoniam

(a) 3. hujus ap. hoc posito, (a) ipsa intra *hyperbolam* AN tota consisteret, contra quàm mox ostensum est.

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & basin DB; *parabola* ad partes supra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD paralle-

Fig. 142. la, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est *Parameter parabolæ* AFB. quòd si supra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse GEq = AG × GK $\sqsubset$ AG × DI = GFq. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, si infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* secans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet esse MOq = AO × DI $\sqsubset$ AO × OL = NOq. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset NO$. quare liquent ea, quæ Proposita sunt.
Si *Circulo* substituatur *Ellipsis*, eadem conclusio valet idem discursus probat; positâ AH *Ellipsis parametro*.

XVIII. Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & basin DB, *parabola* supra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, si infra DB protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I; ergò DI est *parabolæ parameter*. Quòd si supra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, secans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd si infra BD, utcunque ducatur recta MNOL secans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$. & indè $NO \sqsubset MO$. unde constant ea quæ proposita sunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimensionem pertinentes regulæ*. Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, basis BE; sitque C centrum circuli, & EH sinus rectus arcus BAE; item, sit $AD = \frac{s}{t} CA$; erit Fig. 144.

1. $\frac{2t - s}{3t - 2s} AD \times BE \sqsubset$ port. BAE.

2. $EH + \frac{4t - 2s}{3t - 2s} BH \sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3} AD \times BE \sqsupset$ port. BAE.

4. $EH + \frac{4}{3} BH \sqsupset$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimensionem spectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) segmentum ADB, habens axin $AD = \frac{s}{t} CA$; & basin DB; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t + s}{3t + 2s} AD \times DB \sqsupset$ segm. ADB. &

2. $\frac{2}{3} AD \times DB \sqsubset$ segm. ADB.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t - s}{5t - 3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; eſtque punctum

(a) 2. hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E

(b) 8. hujus ap. conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t - s}{2t - s}$ & (b) quæ proinde circulum AEB tangit; (nam ſi $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$, erit $\frac{2t - s}{5t - 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O

(c) 10. hujus ap P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque

(d) 11 hujus ap punctum H ſupra K ſitum eſt.

(e) 4. hujus ap.

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbolæ* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t + s}{5t + 3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. hujus. ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ,

(b) 13. hujus ap cujus exponens $\frac{t + s}{2t + s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t + s}{2t + s} = \frac{n}{m}$, erit $\frac{2t + s}{5t + 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad BE

(c) 15. hujus ap. pertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit;

(d) 16 hujus ap & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H

(e) 4. hujus ap. exiſtit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè speculatio præsens, *ob hujusmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aspernanda videatur, adjungemus consectarium unum vel alterum, quibus fortè solis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* sui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; sitque *segmentum* ADB; & huic adscripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; sit item AD $= \frac{m-2n}{m-n}$ CA; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc est recta, cujus aliqua potestas in potestatem segmenti axis, seu AD, ducta conficit *potestatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in suo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE posita concipiatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorsum contingat, erit GF $\sqsubset$ GE; adeóque $GF^{m} \sqsubset GE^{m}$; hoc est $p^{m-n} \times AG^{n} \sqsubset q^{m-n} \times AG^{n}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum est esse $p^{2m-2n} = ZD^{m} \times AD^{m-2n}$. & $q^{2m-2n} = ZG^{m} \times AG^{m-2n}$. unde $ZD^{m} \times AD^{m-2n} \sqsubset ZG^{m} \times AG^{m-2n}$. quare $ZD^{m} \times AD^{m-2n}$ est maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^{4} = ZD^{3} \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^{2} = ZD \times BD$: Item AD $= \frac{1}{2}$ CA.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^{4}$. vel $p^{7} = ZD^{5} \times AD^{2} = ZD^{3} \times BD^{4}$. & AD $= \frac{4}{7}$ CA.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inscripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; sitque AD $= \frac{2n-m}{m-n}$ CA; erit p sui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG constituta intelligatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrsum contingat, erit $GF^{m} \sqsupset GE^{n}$; hoc est $p^{m-n} \times AG^{n} \sqsupset q^{m-n} \times AG^{n}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{2m-2n} = \frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$; & $q^{2m-2n} = \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$ unde erit $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}} \sqsupset \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$ quare $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD} = \frac{BD^6}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item $AD = CA$.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item $AD = 2\,CA$.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^6 = \frac{ZD^8}{AD^2}$ vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{4}{3}CA$.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB . BY $\sqsubset$ GN . NS. Similíque de causa est NM . MR $\sqsubset$ GN . NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG . BY + MR + NS $\sqsubset$ GN . NS; hoc est arc. GB . BH $\sqsubset$ GN . NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN . NS $\sqsubset$ arc. AG . GE. quapropter erit GB . BH $\sqsubset$ AG . GE. permutandòque GB . AG $\sqsubset$ BH . GE. quare componendo est AB . AG $\sqsubset$ BD . GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.

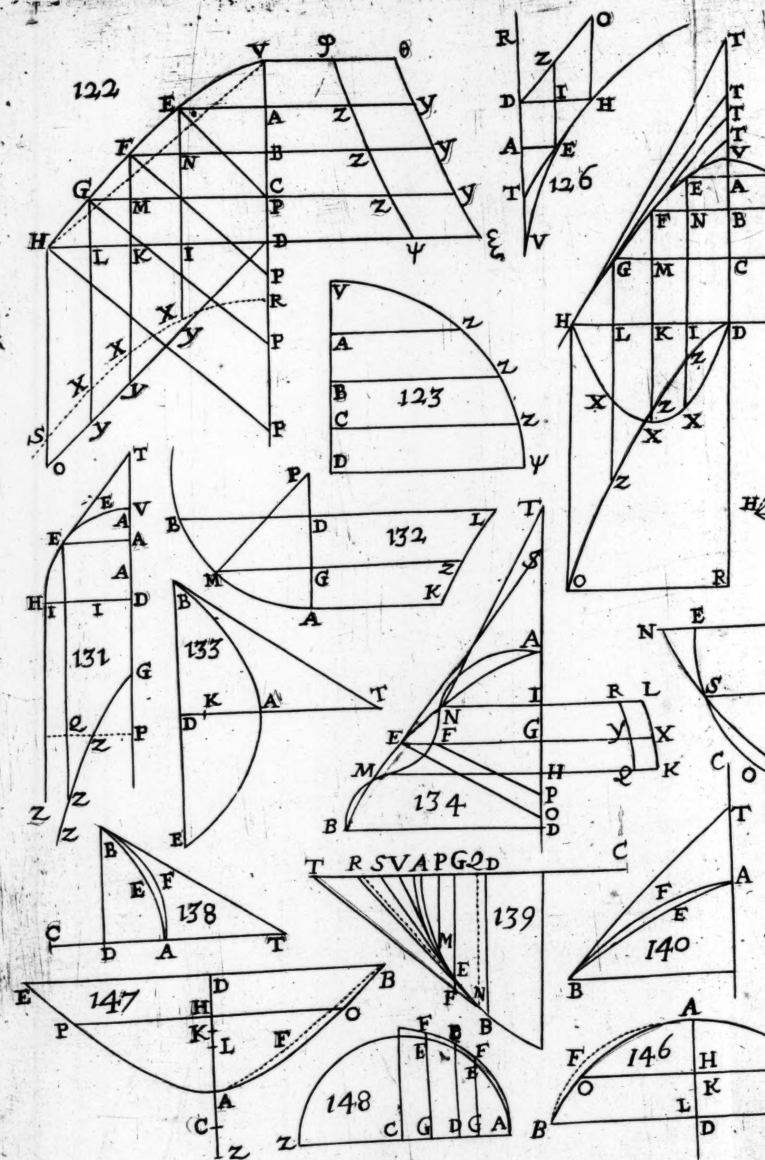

122
126
123
132
131
133
134
138
139
140
147
146
148

Fig. 151

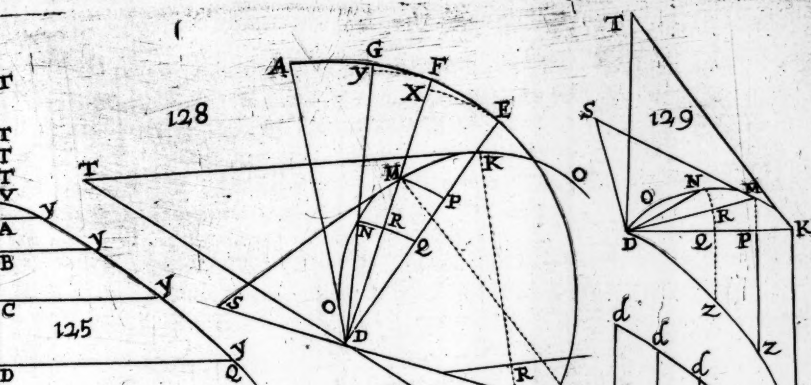


Fig. 152.

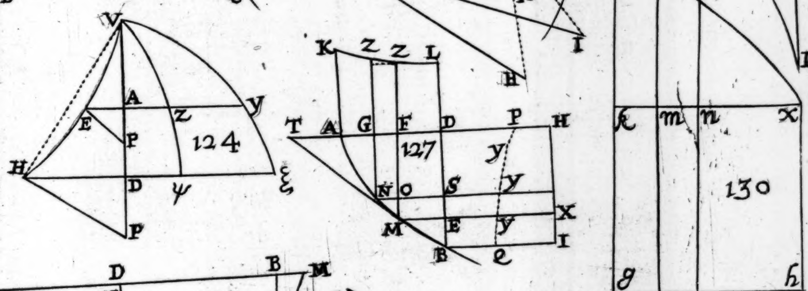
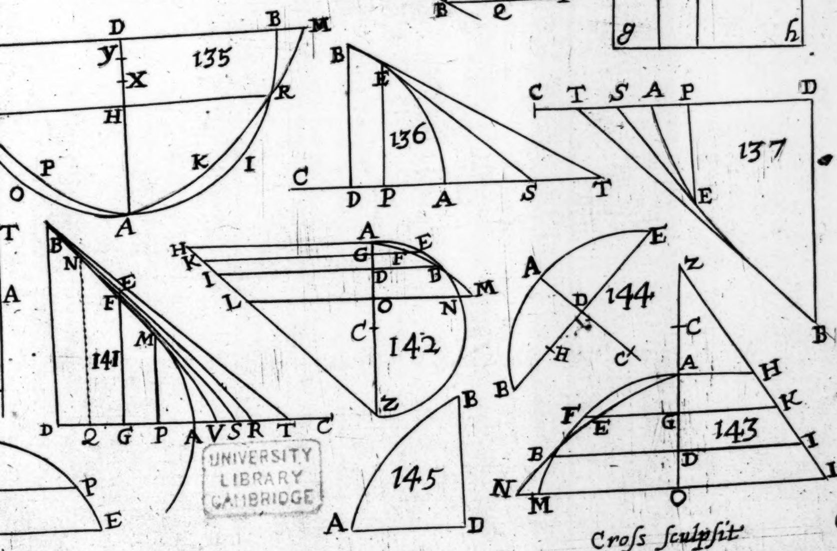


Fig. 153.



Cross sculpsit

6

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta PN æqualis *Arcui* AM; sit demum *axe* AD, *base* DE descripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta PN parabolam in O; & connectantur subtensæ AB, AM; estque DE . PN :: arc. AB . arc. AM ⊏ AB . AM :: DE . PO. quare PN ⊐ PO; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* ADB, ADE *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA + CD}$ ⊐ arc. AB. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. AB = 30 grad. sitque 2 CA = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatísque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *sinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, basin DE statuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expositas secans, ut cernis; connectantúrque *subtensa* AB, AM; estque DE . PO :: AB . AM :: curv. AE . AN ⊏ DE . PN; adeoque PO ⊐ PN. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2\,CD}$ ⊏ arc. AB.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 CA = 113; è regula hac consectatur fore *totam circumferentiam* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium*

AEG

AEG æquatur *Circulari segmento* ADB demonstrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH sese contingentes ad A; communique diametro AHG, utcunque perpendicularis ducatur recta DNM: habebit *segmentum* AIMD ad *segmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam DN.

Nam sit AR ad AG perpendicularis, ac ipsi AH æqualis; & connectatur HR, cui occurrat recta MD in X; ducatúrque recta GXS; tum ad axem AG *parametrum* AS per N descripta concipiatur *Ellipsis* ALNG; hæc (uti satis manifestum) intra arcum AKN tota cadet. Est autem segm. AIMD. segm. ALND:: DM. DN. ergo segm. AIMD. segm. AKND ⊏ DM. DN.

Fig. +154. XXXV. Sit Ellipsis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; sit item recta DC axi majori YZ parallela; & per D, F, C transeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipsis axe minore FT situm; dico circuli partem DOFPC intra ellipsis partem DMFNC jacere.

Nam sit FI ad FV perpendicularis, & in hac sumatur FS = FV; & connectatur VS, cui DC producta occurrat in X; & connexa TX ipsi FI occurrat in R. & cùm sit GDq = FG × GV = FG × GX; liquet ipsam FR esse ellipsis, axi FT congruam, parametrum; unde constat Propositum.

Fig. 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, segmentum DEC, & sumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, sit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad GE parallelâ, sit RS. RM:: GE. GF; erit DMFC ellipsis, hoc modo determinata: Fiat EG. FG:: GL. GH; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, sitque HY par ipsi LE; erunt HY, HF ellipsis semiaxes.

Demonstratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154.

Corol. Hinc segm. DEC. DMFC:: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis subtensa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis GE ad axem GF.

Nam sint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG:: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & sit HY æqualis ipsi LE; tum semiaxibus HY, HF descripta concipiatur ellipsis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipsin DMFC circulo DOFC circumduci. Est autem circulare segmentum DEC ad segmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare segm. DEC ad segm circulare DOFC rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

LECT. XII.

IN suscepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbísque parcamus, observetur, in sequentibus ubique *lineam* A B *curvam* esse (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas esse; *punctum* M liberè sumi; *arcum* M N indefinitè parvum esse; rectam $\alpha\beta$ curvæ V B, $\alpha\mu$ curvæ A M, $\mu\nu$ *arcui* M N æquales esse; ad rectam $\alpha\beta$ applicatas ei perpendiculares esse. His præstratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut F Z ipsi M P, & $\mu\varphi$ ipsi M F æquentur; erit *spatium* $\alpha\beta\delta$ ipsi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M similia sunt, adeoque M N . N R :: P M . M F. unde $MN \times MF = NR \times PM$, hoc est (substitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\varphi = FG \times FZ$; seu rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH; spatium verò $\alpha\beta\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\vartheta$; & spatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propositum.

II. Hinc, si curva A M B circa axem A D rotetur, habebit se *producta superficies* ad *spatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto spatio A D L K cognoscetur dicta *superficies*. Consequentiæ rationem jam anteà pridem assignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriusque, *Conoidúmque superficies dimensionem* accipiunt; nam si A D sit conicæ sectionis, à qua istæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L semper aliqua conicarum existet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc suggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habet ur.

IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* A D I circa axem A D converso procreatur.

Fig. 156, 157.

Nam est M N . N R :: P M . M F :: P M × M F . M F q :: F Z × F M . M F q . unde M N × M F q = N R × F Z × F M; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q$ = N R × F Y q. Unde liquet Propositum.

Fig. 156, 157.

V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam A D. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156.

VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi MP æquetur; & curva $\varpi\xi\psi$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi P F; erit spatium $\alpha\varpi\psi\zeta$ æquale spatio D V O B.

Nam est M N . M R :: M P . P F; adeoque M N × P F = M R × M P. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = E S × E X. vel rectang. E T = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156.

VII. Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob E X q = (P M q = P F q + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + D E q =) DVq + DEq). item *spatium* $\alpha\zeta\psi\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam A M B dari; & vicissim. Hoc obiter.

Fig. 157.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\varpi\xi\psi$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis P F q × E X; ac ità porrò.

Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, & $\mu\varphi$ ipsi A Q; *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* A D L K æquari.

Nam

Nam ob MN . NR :: PM . MF :: PQ . QA ; erit MN × QA = NR × QA ; hoc est rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, sintque curvæ DXO, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut EX æquetur ipsi MT, & $\mu\varphi$ ipsi MF ; erit spatium $\alpha\zeta\delta$ æquale *spatio* DXOB. Fig. 158.

Nam MN . MR :: MT . MF . quare MN × MF = MR × MT ; 159.
hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi$ = ES × EX ; unde patet.

XI. Hinc rursus, *superficies solidi ex spatii* ABD circa axem AD conversione progeniti ad *spatium* DXOB se habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium* ; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus *Sphæroidum, Conoidumque superficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut sit $EY = \sqrt{EX \times MF}$; erit *solidum* ex *spatio* $\alpha\zeta\delta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido, quod ex spatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim est MN . MR :: MT × MF . MFq :: EX × MF . MFq :: EYq . MFq . quare MN × MFq = MR × EYq . hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q$ = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque potestatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *summas* cum *spatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ AZK, $\alpha\xi\psi$ tales, ut FZ ipsi MT, & $\mu\xi$ ipsi TF æquentur ; *spatium* $\alpha\zeta\psi$ æquabitur *spatio* ADK.

Etenim MN . NR :: MT . TF ; hoc est $\mu\nu$. FG :: FZ . $\mu\xi$. Fig. 158.
quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. 159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *summæ Rectangulorum* ex TF, FZ ; & *summa Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipsis TFq × FZ (ad rectam scilicet AD computationem exigendo) Fig. 158, parique quoad cæteras potestates modò. 159.

XVI. Rursus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis ; sitque recta $\zeta\delta$ æqualis ipsi BD, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$, tum curva KZL talis sit, ut FZ ipsi QP æquetur ; erit *rectang.* $\alpha\zeta\delta\zeta$ Fig. 160, æquale *spatio* ADLK. 161.

Nam est MN . NR :: (PM . MF ::) PQ . IF. quare MN × IF = NR × PQ ; hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ . unde patet.

Hinc noto ſpatio A K L D cognoſcetur curvæ A M B quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam T M Y contingere curvam A M B, factâque $\beta\gamma$ = B C, completóque *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$, ſit curva O X X talis, ut F X ipſi T Y æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) A D O X X æquale *Rectangulo* $\alpha\beta\gamma\psi$.

Nam M N . N R : : Y T . D A; hoc eſt $\mu\nu$. F G : : F X . $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta$ = F G × F X. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva A M B innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\beta\delta$ = R; ſi curva O X X talis ſit, ut M F . M P : : R . F X; erit *rectangulum* $\alpha\beta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam M N . N R : : M P . M F : : F X . R. adeóque M R × R = N R × F X; ceu $\mu\nu \times \mu\xi$ = F G × F X.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ A M B convexa rectam A D ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (*θεωρηματικῶς*) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis A K, D L; rectâ A D; & lineâ quâcunque K L *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ F H ad D L parallelâ (quæ ſecet lineas A D, C E, K L punctis F, G, H) adſumptâque rectâ de-

Fig. 163. terminatâ Z; ſit *quadratum* ex F H æquale *quadratis* ex F G, & Z. quinetiam ſit curva A I B talis, ut ad ipſam productâ rectâ G F I, ſit *rectangulum* ex Z, & F I æquale *ſpatio* A F G C; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* A B æquale *ſpatio* A D L K.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta A K ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit K L *recta linea*; erit curva C G E *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea K L *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & A K

= Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva A B $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2\,AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* $AK = Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cyclois*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantésq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *circuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta αC æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu\varpi\psi$ rectæ αC perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\psi = CS$; $\mu\varpi = MP$.

Fig. 167.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F . C A :: (C M . C S ::) C A . C S. adeòque C F × C S = C A q. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9.

III.

III. Curva A X X talis sit, ut P X secanti C S (vel C T) æquetur; *spatium* A C P X hoc est *Summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo sectori* A C M.

Nam (a) *spatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* est; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum spatium* A C P X totius *sectoris* A C M duplum est. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva C V V talis sit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *spatium* C V P (hoc est *summa tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *semissi quadrati ex subtensa* A M. Fig. 166.

Manifestè consectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbola* L E occurrat in O) erit *spatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (seu *cylindricum* ad basin P L O Q, altitudine B C (duplum *summæ quadratorum* ex rectis C S, seu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc est ::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item est Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) est P L + Q O. Q O + Q O. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc est P L + Q O. B C :: 2 B Cq. B Cq — C P Q (hoc est::) 2 B C q. P M q. verùm est P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq. PMq. ergò PL + QO. BC :: 2 PXq. BCq. vel PL × BC + QO × BC. BCq :: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque B C in omnes PL + Q O ducta adæquat omnia totidem PXq. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (hoc est *summa secantium in arcu* A M ad $\alpha\zeta$ applicatarum) æquatur *subduplo spatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam sumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Estque M N. M R :: (MC. CF :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque MN × PX × CA = MR × P X q. seu $\mu\nu \times \mu\psi$ × C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q summa spatii P L O Q in C A ducti subdupla est. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\psi$ in C A ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium $\alpha\gamma\psi\mu$ (omnibus

nibus $\mu\nu\times\mu\psi$ par) æquatur subduplo spatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant CA × CP × PX (hoc est *parallelipipedum Base Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonstrationem* (quanquam πεὀχειον) transilio; quoniam aliud *Schema* discursúmque præ reliquis plerísque longiusculum exposcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis sit, ut FY æquetur ipsi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *spatium* ACIYYA (hoc est *summa Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *subduplo spatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 1. Lect. XII. Nam *spatium* $\alpha\gamma\varpi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc est *rectangulo* FCIY (nam est CA.AS :: CF.FM, vel CA.FY :: CF.CP. adeoq; CA×CP = FY×CF). item spatium $\gamma\varpi\psi$ (hoc est omnes

(b) 14. Lect. XII. rectæ TF ad $\alpha\varpi$ applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur *spatio* AFY; ergo *spatium* ACIYA æquatur *spatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc est (ut mox ostensum) *semissi spatii hyperbolici* PLOQ.

Aliter illud, (eique connexa) dimensus sum, *hoc præmisso Lemmate*.

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; sit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè sumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, sint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Estque CH.CE :: CE.CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum est *segmenti* EDK. item *rectangu-*

10. Lect. XI. *lum* IKDC *trianguli* CDK duplum est; ergò *reliquum spatium* CEYI *reliqui sectoris* ECK duplum est.

Fig. 169. X. Resumptâ jam quadrante circulari ACB, sit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, descripta sit *Hyperbola* EKK; positóque curvam AYY talem esse, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, sit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam

CZ,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C I q . C A q : : A S q . C A q : : F M q . C F q : : C A q — C F q . C F q . componendoque ; C I q + C A q . C A q : : C A q . C F q . hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I K q . C A q : : C A q . C F q . vel I K . C E : : C E . I Y . itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.
XIII. Nescio, an *operæ* sit hoc adjicere *Corollarium*.

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z , E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K , cujus *centrum* C, *semiaxis* C E ; ductâque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* AEOYZPA (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* C E X. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H . ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I . & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I . ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K ; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T . & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf*. A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z secet in Z, sit M Z = A S) in recta verò $\alpha\beta$ sumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* AM *sinubus versis* A F ; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Estque jam A S . A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F . F M . & 2 C M . 2 M N : : C M . M N : :) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S . 2 M N : : A F . N R ; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc est N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *spatium* M A Z *duplo spatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *spatii* $\alpha\mu\xi$ dimensio vulgò nota sit, & è suprà positis

Fig 172. etiam facilè deducatur ; habetur *spatii cissoidalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

Ista claudet hoc *Consectariolum* :

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;

Fig. 173. (a) 7, & 12. sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbola*, eædem quæ (*a*) superius. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitè multas punctis N ; per quæ trajiciantur radii C N ; & his occurrant rectæ N X ad puncta X ; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio $\frac{AFZK}{Rad.}$; & *summa rectarum* N X (in parallelis ad AS) æquatur *spatio* $\frac{PLQO}{3\ Rad.}$.

Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est ; & inde X M . M N : : A S . C A . & X N . M N : : C S . C A . unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ità in reliquis ; unde liquet Propositum, ex 2, & 7 harum.

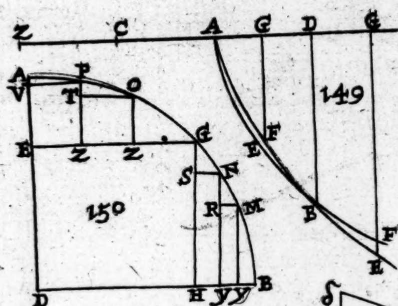
APPEN-

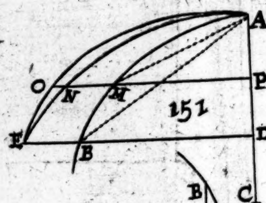
Z

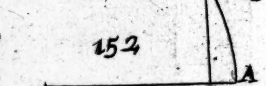
H

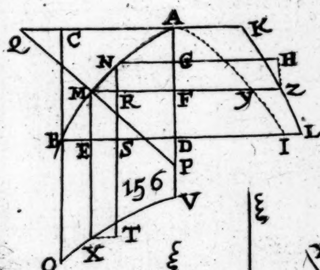
L

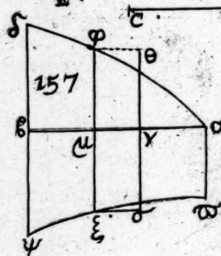
7


149
150
Z C A G D G
A P O
V T
E Z Z G
S N
R M
E F
E F
E
D H y y B

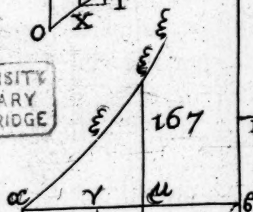

151
A
O N M P
E B

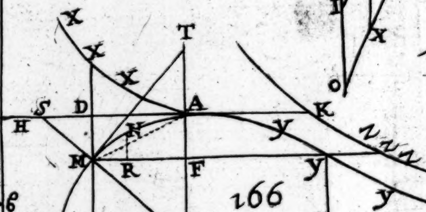

152
B C
C D A

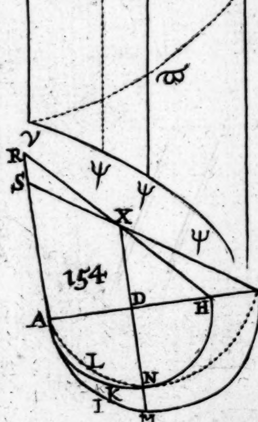

156
Q C A K
N G H
M R F y z
B E S D I L
P
V
T
O X

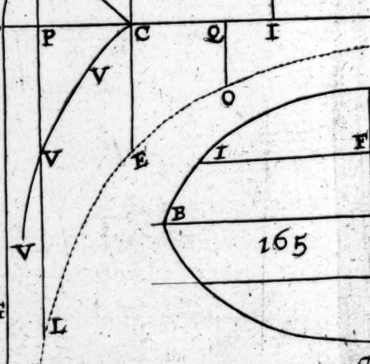

157
δ φ θ
ϐ μ γ α
ψ ξ σ ϖ

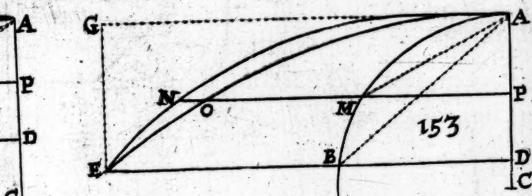

C
N
M R
B E S
y
I
X
O

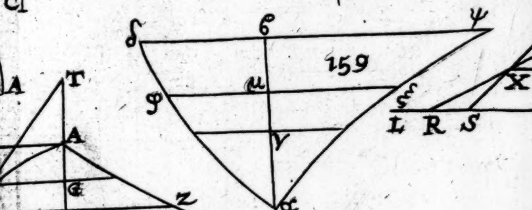

167
ξ
ξ
ξ
α γ μ ϐ
ϖ

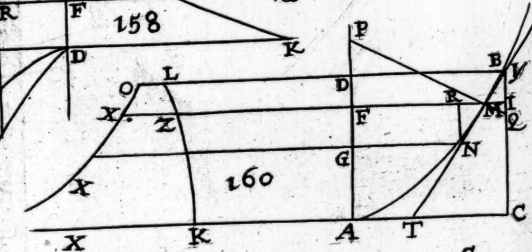

166
ξ
X
X
X
T
S D A K
H
N
y
M R F y
y
B P C Q I
V
V
V
E
G L

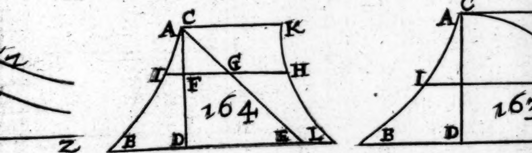

154
γ
R
S
ψ
ψ
ψ
X
A D H G
L
N
K
I M

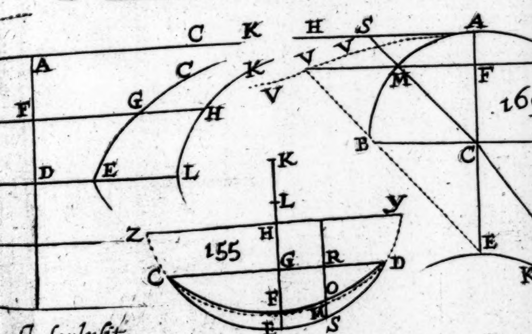

165
O
I F
B


G
A
N
O
M
P
153
B
D
E
C

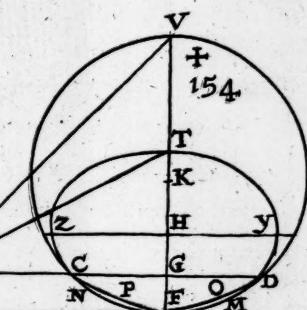

δ
ϐ
ψ
159
μ
ξ
γ
L
R
S
T
A

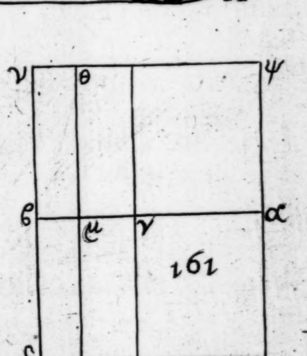

158
K
D
L
P
B
O
X
Z
F
R
M
G
N
160
C
A
T
K
X

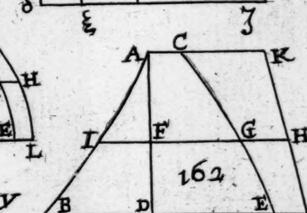

A
C
K
I
F
G
H
164
B
D
E
L
163

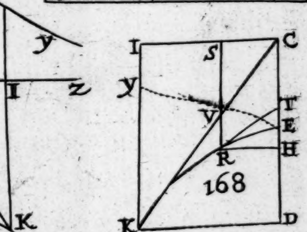

C
K
A
F
G
H
D
E
L
H
S
V
M
169
B
C
I
Z
E
K
L
Y
Z
155
G
R
D


C
F
O
E
S
roß sculpsit


V
154
T
K
Z
H
Y
C
G
X
N
P
F
O
D
M


ν
θ
ψ
ϐ
μ
γ
α
161


δ
ξ
ζ
Z
A
C
K
I
F
G
H
162
B
D
E
L


I
S
C
Y
T
V
E
H
R
168


K
D

7

APPENDICULA 2.

BRevitati simul ac perspicuitati (huic autem præcipuè) consulentes præcedentia recto discursu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, satis firmatur, at ejusdem origo limpidiùs apparet. Verùm nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adsuetus, hæreat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiantur, quorumque subsidio non difficilè conficiantur *Propositorum demonstrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, singulæ designatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (simul acceptarum) ad *omnes consequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam sint rationes A ad M, B ad N, C ad O singulæ æquales rationi R ad S. ergò X $\sqsupset$ M; & Y $\sqsupset$ N; ac Z $\sqsupset$ O. patet igitur fore A + B + C . X + Y + Z $\sqsubset$ A + B + C . M + N + O. hoc est A + B + C . X + Y + Z $\sqsubset$ R . S.

II. Hinc patet, si quotlibet rationes singulæ designabili quâcunque majores sint, *antecedentium summam ad summam consequentium* etiam designabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; sitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam secans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis designabili, puta quàm R ad S.

Nam sit D E . E T :: R S; connexaque recta B E curvam secet in G, rectam P O in K; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, est B P ⊐ B F; adeóq; P K ⊐ P N (nam subtensa B G intra curvam tota cadit). ergò P N. N O ⊏ P K . K O :: D E . E T :: R . S.

IV. Hinc, si basis D B in partes secetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam secantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (simul sumptas) rationem quàvis assignabili majorem.

Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent
Fig. 175. igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergò simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quâvis *majorem*; hoc est recta AD ad EQ -|- F R -|- G S -|- A T ejusmodi rationem haber.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. respectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tutò licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B; æquisecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B intersecantes punctis X; quibus occurrant per ipsa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; sit autem segmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenso) *circumscripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *spatio* quodam S; dico *segmentum* A D B non esse minus quàm S.

Nam si fieri potest sit A D B minus quàm S excessu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R est indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus esse *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindéque majus est *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergò *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*. Fig. 176.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFXEXZDH minor *spatio quodam* S; dico *segmentum* ADB non esse majus quàm S.

Nam si majus esse velis, esto rursum *excessus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (sicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inscriptâ. ergò segmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus sit inscriptâ figurâ; hoc est *spatium* S minus est inscriptâ figurâ, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumscripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inscripta figura* æquetur *figuræ* HGFEZDH; palàm est *spatium* istud S *segmento* ADB exæquari.

Nam (utì mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis* ac *inscriptionis modos* accomodari. suffecerit innuisse.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

Sit *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc signatum punctum C; ad ipsum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; sit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipsi MG perpendicularis; nam si ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam esse, adeoque GM eidem recta erit) Porrò sit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ secet ordinatam Fig. 177.

dinatam BD in I, & lineam RS in X) sit MP . ME :: VG . IX; vel, sit linea AL talis, ut ductâ MPY ad BD parallelâ (quæ secet axem AD in P, & lineam AL in Y) sit PE . ME :: VG . PY; erit
Fig. 177. tunc utrumque *spatium* (singillatim) BRSD, vel ADL duplum *superficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam AMB mota progeneratur.

Nam sumatur MN indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ NOKT ad ipsam AD, & NQZ ad BD parallelæ (quæ lineas expositas, ut *Schema* monstrat, secent) connectantúrque rectæ VM, VN. estque MO . MN :: MP . ME :: VG . IX. quare MN × VG = MO × IX = IK × IX. Item est NO . MN :: PE . ME :: VG . PY. unde MN × VG = NO × PY = QP × PY. Est autem MN × VG duplum trianguli MVN. quapropter tam IK × IX, quàm QP × PY duplum est *trianguli* MVN. pariter autem ubique fit. ergò constat Propositum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva AMB *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, sitque CV = CA = *r*. & CP = *x* (nam hujusmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ MC; patet esse $EC = \frac{rr}{x}$; & MCq = $2xx - rr$ (nam PMq = $xx - rr$) item est MCq. CPq :: MEq . MPq; hoc est MCq . CPq :: ECq . CGq. hoc est $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx}$. CGq = $\frac{r^4}{2xx - rr}$. quare VGq = $\frac{r^4}{2xx - rr} +$ $rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel VG = $\frac{VA \times CP}{MC}$. quare VG . VA :: (CP . MC) :: MP . ME. hinc consectatur in hoc casu, quum ubique sit IX = VA, *lineam* RS fore *rectam*; & *rectangulum* BRSD *superficiei conicæ* AMBV *duplum esse*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* suppeditavit Generosus, ingenio ac eruditione præstans, Vir (*Collegii nostri, quod olim Sociorum Commensalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciscus Jessopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioso mihi comiter impertito scripto (ipsius injussu quidem, at spero non ingratiis) seu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C transeat per *coni superficiem*, & quiescente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut semper aliqua pars ejus secet *coni superficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in superficie coni sitas) *solidum comprehensum à superficie vel superficiebus genitis à linea* E C sic mota & à *portione superficiei* ejusdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata describit in *superficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* est æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *basis* verò æqualis eidem *superficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C constat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum bases omnes simul sumptæ, exhauriunt *superficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus sit *Conus rectus* A B C *p* secetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & super *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; sitque E δ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita se habet ad A C D *basem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano basi C F D (quæ est utrique Conico communis) parallelo ergo sunt æquales. Si ergò à solido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit solidum E C F D A C quale in propositione prima describitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ sunt *bases altitudinibus*, ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus sit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto *q* supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quiescente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A*r* generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *superficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *solidum æquale* est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt solidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc solidum *q r s t* A *r* potest considerari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *base figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *superficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Datus sit *Conus rectus* A B *h g* secetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur HK
Fig. 179. *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata a lineis F E G G A A F ita se habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapsa; quæ forsan ex usu sit adjicere. *Demonstrationes* elicere poterit quispiam è præmissis; & potior inde fructus emerget.

Problema I. Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc signatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut si ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG secet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; sit TM ipsi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD sumptum, protendatur recta RZ ad ipsam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP sumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum sit rectangulum ex AR, & PM æquale spatio AYYP (seu $PM = \frac{\text{spat AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propositam.

Adnotari potest, si stantibus reliquis, sit curva QXX talis, ut cum hanc secet recta EP in X, sit PX = AS; erit spatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, seu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; designetur curva AMB talis, ut si producta recta EPM hanc secet in M, ipsamque tangat recta MT, sit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis sit, ut si hanc secet producta PE in Y, sit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd si curva QXX talis sit, ut PX = DS (vel si AQ = AD, & QXX sit *hyperbola* angulo ADG comprehensa) erit curva AM × AD = spat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut si à quocunque puncto in ipsa sumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, sit A E inter designatam A R, & A P proportione media, secundum ordinem, cujus exponens sit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n \,.\, m :: $ A E . arc. A M.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E sit inter A R, A P simpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimensio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehensivo peraguntur.

Probl. II.

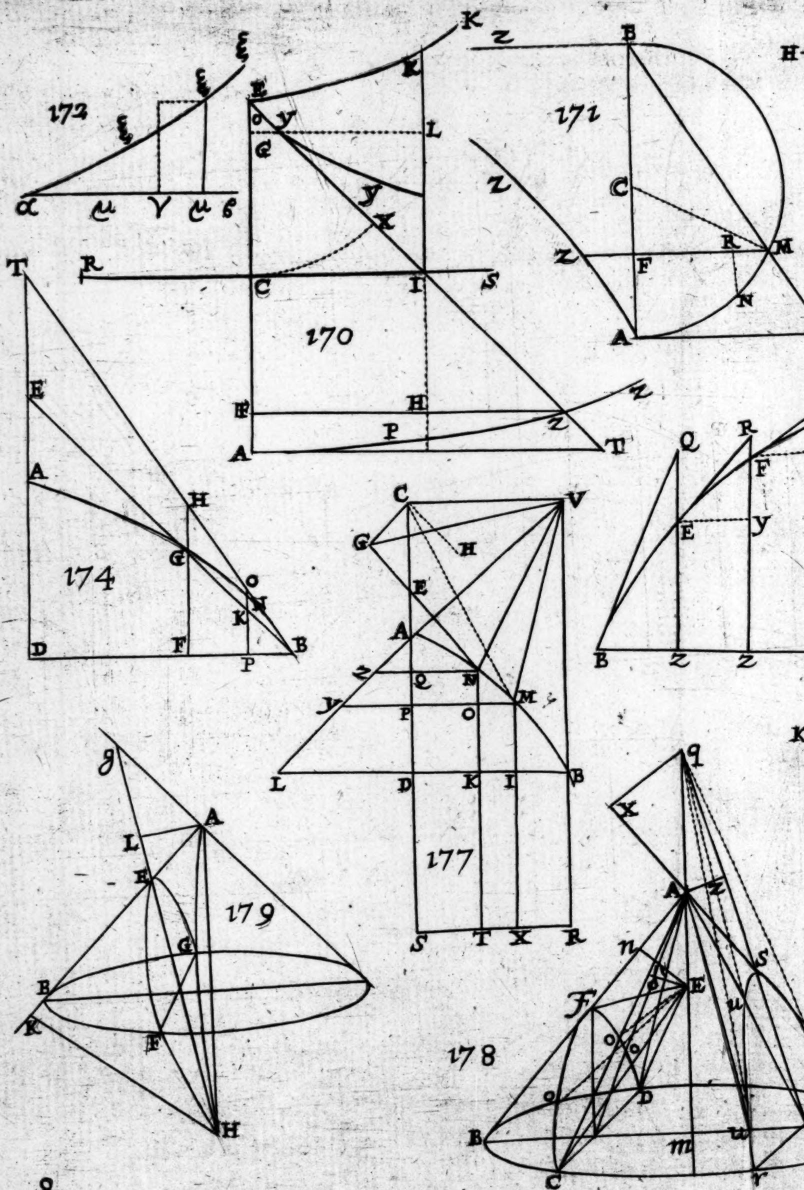
Fig. 183. Curva designetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac sumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & posito rectam M T ipsam tangere, habeant T P, P M relationem assignatam.

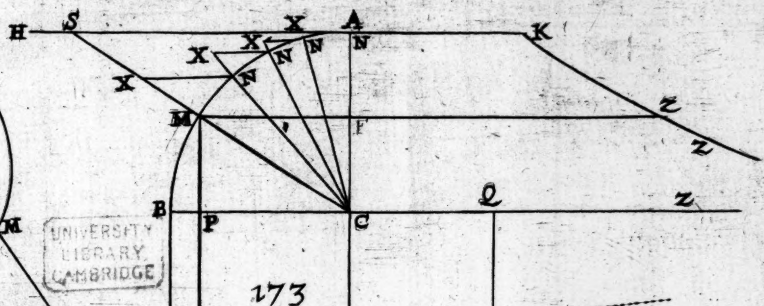
Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem assignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe sumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) sic ut per ejusmodi puncta Y transeat curva Y Y K; tum si fiat P M $= \frac{\text{spat. A P Y}}{\text{R}}$; de curvæ A M B indè constabit natura.

Exemp. I.

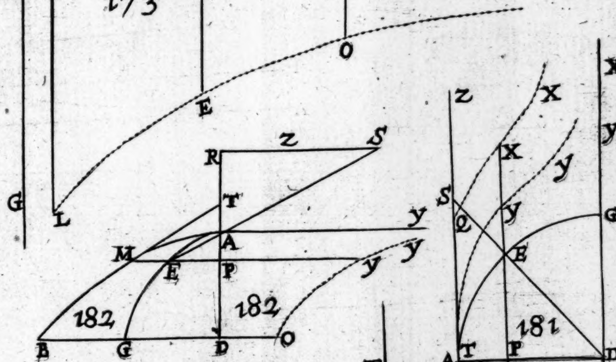
Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur designatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum sit, juxta præscriptum, R. arc. A E :: R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur P M $= \frac{\text{A P Y}}{\text{R}}$.

Exemp.


172
170
171
174
177
179
178
8







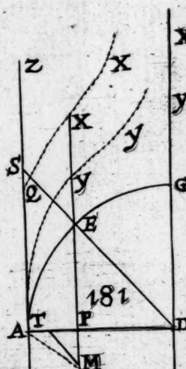
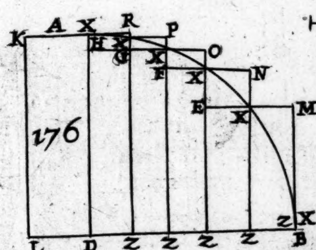
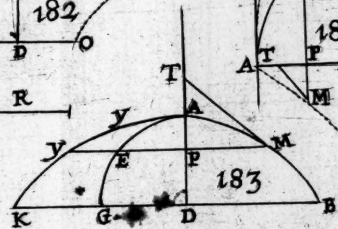
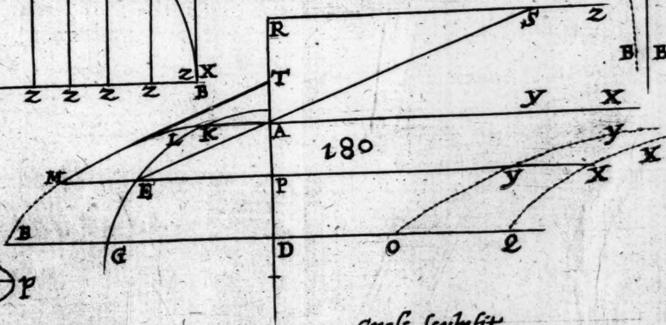


Fig. 185.





ig. 186.



Cross sculpsit

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R :: R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R :: R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium LEXH æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* LEXH; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. ADLK = R × D L — DO. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\,cub. - DO\,cub.}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ ADLK, ducantúrque $\varphi\psi$ ad A D, & $\varphi\xi$ ad D L perpendiculares, fore $\varphi\psi = \frac{DL + DO}{4}$, & $\varphi\xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuò curva A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari sectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiátque D K . R : : R . P; tum D K . P : : D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac *o* sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hpperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallissius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, u

Fig. 188. si utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T . D M : : R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{}$ R × D N; sumptâque liberè rectâ

rectâ D B, sit D B . R : : R . B F (sit autem B F, ut & D H ipsi D B perpendicularis) tum per F, angulo B D H inclusa, transeat *hyperbola* F X X; sitque spatium B F X I (positâ nempe I X ad B F *parallelâ*) æquale duplo spatio Z D L; sit denuò D M = D G; erit M in curva quæsita; quam utique si tangat recta T M, erit T D . D M : : R . D N.

Probl. VI.

Sit rursus spatium E D G (ut in præcedente) reperienda est curva A M B, ad quam si projiciatur recta D N M, & sit D T huic perpendicularis, & M T curvam A M B tangat, fuerit D T = D N. Fig. 188.

Adsumatur quæpiam R, & sit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ D B (cui perpendiculares D H, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *asymptotos* D B, D H describatur *hyperboliformis* secundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu B F, vel I X, sint quartæ proportionales in ratione D B ad R, vel D G ad R) tum capiatur spatium B I X F æquale duplo Z D L; & sit D M = D I; erit M in curva quæsita; quam si tangat M T, erit D T = D N.

Probl. VII

Sit figura quævis A D B (cujus *axis* A D, *basis* D B) & utcunque ductâ P M ad D B parallelâ datum sit (seu expressum quomodocunque) spatium A P M, oportet hinc ordinatam P M exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, sit R × P Z = A P M; hinc emergat linea A Z Z K; huic perpendicularis reperiatur Z O; tum erit P Z . P O : : R . P M.

Exemp. A P vocetur x & sit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Estque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} : : r . \frac{3}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde A M B est *Parabola*, cujus *Parameter* est $\frac{2}{4}r$.

Aliter.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2\,APM}$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola.*

Probl. VIII.

Fig. 190. *Sit* figura quævis A D B (rectis D A, D B, & linea A M B comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ D M, datum sit spatium A D M; oportet rectam D M definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & Z O curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat D H ad D M perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & Z O curvæ A Z K perpendicularis; cui occurrat D H ad D Z perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σύνοψιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Aberd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam A D B (cujus *axis* A D, *basis* D B) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam C L describatur *Circulus* L X X; sit autem curva K Z Z talis, ut pro lubitu ductâ rectâ M P Z ad B D parallelâ,

rallelâ, ſit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{ſpat. } DKZP}{CL}$ (vel ſector LCX ſubduplus ſpatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$; erit linea $\mathfrak{C}\mu\mu$ ipſius BMA involuta; vel ſpatium $C\mu\mathfrak{C}$ ſpatii ADB.)

Exemp. Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonſtratis conſtat) ſpat. DKZP (2 ſector LCX). ſect. BDM : : CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM : : CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu\mathfrak{C}$ eſt rectus, adeóque linea $\mathfrak{C}\mu C$ eſt *ſemicirculus*.

Coroll. 1. Subnotari poteſt, ſi duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involuta* ſint $C\mu\mathfrak{C}$, $C\nu\gamma$; & fuerit $C\mu$. $C\nu$: : DB. DG; erit reciprocè ang. $\mathfrak{C}C\mu$. $\mathfrak{C}C$[illegible] DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ $C\nu\gamma$, $CS\mathfrak{C}$ ſuo modo analogæ fuerint, hoc eſt, ſi utcunque à C projectâ rectâ $C\nu S$, habeant $C\nu$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ ſimilium linearum *involuta*. Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $\mathfrak{C}C\varphi$ rectis $C\mathfrak{C}$, $C\varphi$, & aliâ lineâ $\mathfrak{C}\varphi$ comprehenſâ, ei competentem *evolutam* deſignare. Fig. 195.

Centro C utcunque deſcribatur *circularis arcus* LE (cum rectis $C\mathfrak{C}$, $C\varphi$ conſtituens ſectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, ſit curva $\mathfrak{C}$YH ità rectam CK reſpiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, ſumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, ſit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA ſic referatur curva BMF, ut cùm ſit $DP = \frac{\text{ſpat. } C\mathfrak{C}YO}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; ſit etiam $PM = C\mu$; erit ſpatium DBFA ipſins $C\mathfrak{C}\varphi$ *evolutum*. Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C deſcripti, & $\mathfrak{C}\mu C$ ejuſmodi Fig. 197.

ſpiralis

spiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem assignatam (puta R ad S) Manifestum est lineam ϲ Y H esse rectam, quoniam E Z (K O) . C μ (O Y) :: R . S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F sit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D se habent ut spatia K O Y, K C ϲ, hoc est ut quadrata ex ipsis OY, Cϲ, vel ex ipsis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram ϲ C φ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iste *cylindricus* æqualis *solido*, quod procreatur è figurâ C ϲ H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) & curva A Z L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, sit P Z = $\surd$ 2 A P M; sit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adsumptâque rectâ R, sit Z P q . R q :: P M . P Y; sitque denuò D L . R :: R . L E. & per E intra angulum L D G describatur *Hyper-*
Fig. 199. *bola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit spatium P D O Y æquale *spatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *summa* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2\,LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, basis D B; & curva K Z L talis, ut adsumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, sit $\surd$ A P M . P M :: R . P Z; erit spatium ADLK
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 $\surd$ A D B; vel $\frac{ADLK}{2R} = \surd$ A D B.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit summa omnium $\frac{PM}{APM} =$ $\surd$ 2 D A × arc. A B.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) sintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B sumpto quopi-

am

am puncto M, ductisque rectis MPX ad BD, & MQY ad AD parallelis, positoque rectam MT tangere curvam AMB, sit TP. PM :: QY. PX; erunt figuræ ADKE, DBLG sibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc conversum. Nempe si figuræ ADKE, DBLG æquentur, & MT curvam AMB tangat, erit TP. PM :: QY. PX:

Not. Omnium hactenus Propositorum foecundissimum est hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè consectantur. Nam posito lineam AMB indeterminatam esse naturâ, si ipsarum EXK, GYL alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea GYL ponatur recta cum ipsa BD semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si GYL sit recta ad DB parallela, emerget *Lectionis ejusdem.* Rursus si PM = PX (vel lineæ AMB, EXK sint eædem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porrò liquet adsumpto cuilibet spatio *infinita, genere diversa, spatia æqualia* facilè designari veluti si *spatium* DGLB ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva AMB sit *parabola*, cujus *axis* AD, emerget curvæ EXK hæc proprietas, ut (si dicatur DB = r; AP = x; PX = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) sit *parabolæ semiparameter*) sit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin AMB ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva EXK. his autem expensis ἀβλεψίαν meam incuso, qui non hoc *Theorema* (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & suppar usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subjiciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi *Phrygiam sapientiam* juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus. Fig. 202.

Theor. V.

Sit spatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curva AMB comprehensum) sint item curvæ EXK, GYL ità relatæ, ut si in curva AMB liberè sumatur punctum M, ducatur DMX, sit DQ = DM, ducatur QY ad DB perdendicularis, sit DT ad DM perpendicularis, recta MT curvam AMB contingat; si, his inquam suppositis, sit TD. DM :: DM × QY. DXq; erit spatium DGLB spatii EDK duplum. Fig. 203.

Theor. VI.

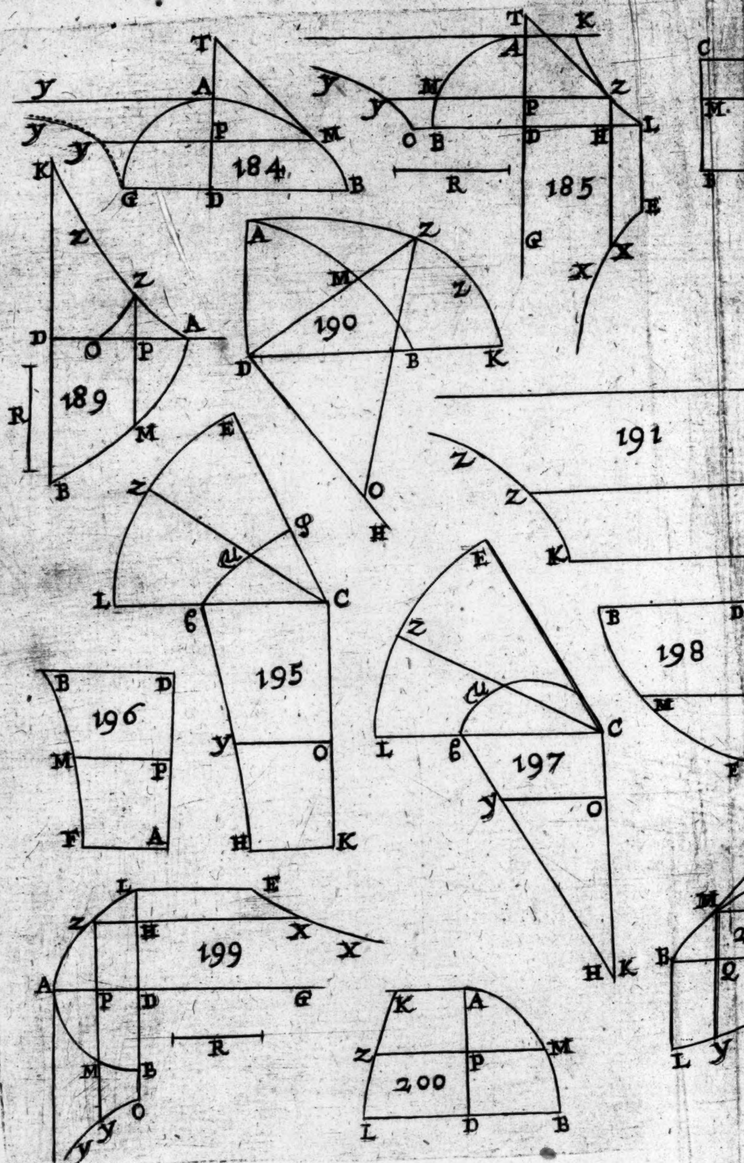
Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ $\alpha\mu =$ arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P . T M :: μ Z . P X; erunt spatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia sibi.

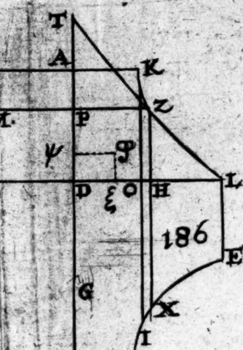
Theor. VII.

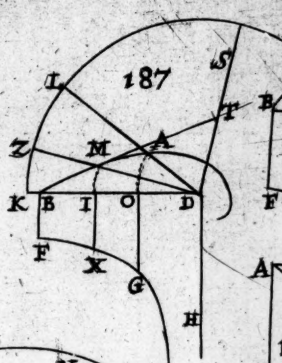
Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur $\alpha\mu =$ arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat; sit T D . T M :: D M × μ Z . D Xq; erit spatium $\alpha\zeta$ O H spatii E D K duplum.

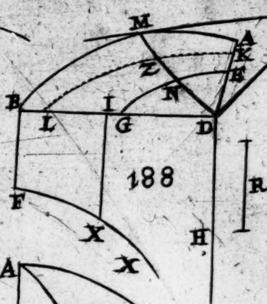
Sed horum hic esto terminus.

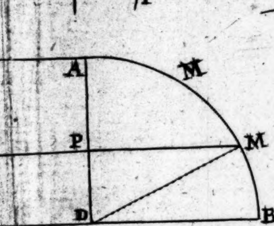
LECT

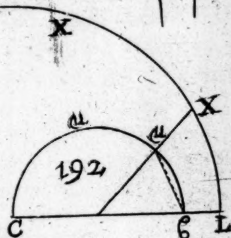

184
185
189
190
191
195
196
197
198
199
200

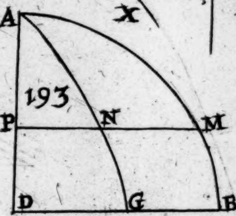

T
A
K
Z
P
ψ
φ
D
ξ
O
H
L
186
E
G
X
I

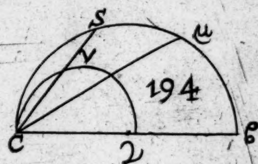

187
L
S
T
Z
M
A
K
B
I
O
D
F
X
G
H

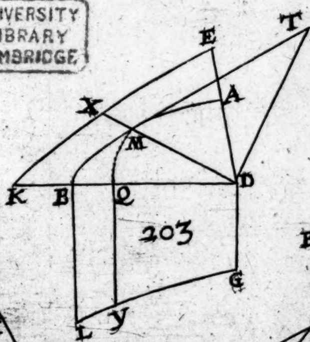

M
T
A
K
E
Z
N
B
I
L
G
D
188
R
F
X
H

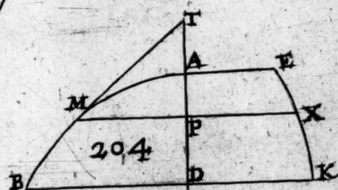

A
M
P
M
D
B

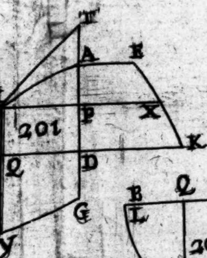

X
X
192
C
L

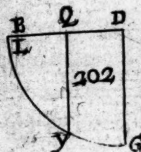

A
193
P
N
M
D
G
B

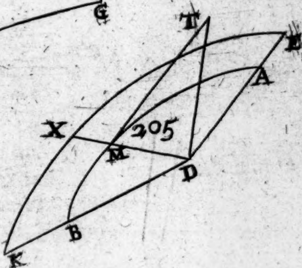

S
V
194
C


E
T
A
X
M
D
K
B
Q
203
G
L
Y


T
A
E
M
X
P
204
B
D
K


T
A
E
P
X
201
K
Q
D
G


B
Q
D
L
202
Y
G


T
E
A
X
205
M
D
B
K


H
Z
O

06.

ag. 90.



Lect. XIII.

Æquationum naturam è terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidiùs explicuit *Cartesius*. Eam ego jam è linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sanè modus rem præsertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent easdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc versus H indefinitè protendatur; sint anguli R A H, S B H semirecti, sintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine secet punctis L, M, N; rectasque B S, A R punctis K, Z) sit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Nam si A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. pag. 90.

 Notetur

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur A E $= n$; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi a; hoc est ipsis A G, concipiendo à singula intersectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magìs increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hiperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & A P $= \frac{1}{3}$ A B, & A Q $= \frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum ALL, AMM, ANN *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \&c.$$

Fig. 207.

Sit rursus A B $= b$; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, utì cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter

G Z,

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GN qq $= a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ sunt *hyperboliformes*.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducanturque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *asymptoti*.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd si n satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; scilicet ipsa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n$.

$ba - aa = nn$.

$baa - a^3 = n^3$.

$ba^3 - a^4 = n^4$. &c.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$. Fig. 280.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E = *n*; & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices *a* reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel *n*) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeóque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsupset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsupset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{81} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsupset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel *b*.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n.$	$b - a = n.$
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro singulo trium serierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur istæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protensa, & huic perpendicularis A D; in qua sumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum sint lineæ L X L, M X M, N X N tales, ut sumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, sit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Fig. 209, 210.

Nam sumpta A E = *b* (sumatur autem A E ob primam seriem ad partes I, ob secundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H semirectus (iste quidem pro prima & secunda serie inclinans versus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema satis monstrat) tum rectæ E F cum expositis lineis intersectiones respectivæ radices *a* determinabunt; nempe si per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales respectivè.

Not.

Exhinc constat, quòd

1. In hac explicatione *coëfficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipsa *n*.

2. In prima & secunda serie semper una positiva radix habetur, & unica.

3. In secunda serie minima radix ipsi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* est *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia serie subindè duæ habentur radices positivæ (quando scilicet E F curvas bis secat) nonnunquam una tantùm (cùm E F ipsarum aliquam contingat; id quod accidit in secundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3} b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4} b$) aliquandò nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nusquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva est *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *asymptoti* sunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cca = n^3.$$
$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; Fig. 211. fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG. AG :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit GK $= a + \frac{cc}{a}$; & GLq $= aa + cc$; & GMcub $= a^3 + cca$; & GNqq $= a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ AE $= n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit Y$\alpha = \frac{1}{2}$YX; Y$\beta = \frac{1}{3}$YX; Y$\gamma = \frac{1}{4}$YX, & per puncta α, β, γ, traductæ concipiantur *hyperbolæ* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$; in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor est, quò AE (vel n) major existit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Possit hæc series explicari juxta præcedentium modum secundum, & easdem adhibendo curvas LXL, MXM, NXN; quarum nimirum proprietas est, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendiculari, sit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam si fiat angulus HAR semirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & sit GE. c :: c. EO; & per O intra asymptotos AD, AR describatur *hyperbola* OO; hujusce cum expositis lineis LXL, MXM, NXN intersectiones, radices a respectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus, erunt interceptæ AG ipsis a æquales respectivè.

Possint consimili modo subsequentes omnes æquationes explicari; sed eas modo duntaxat priore dabimus expositas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

Series sexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI semirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua AC = c; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, sit AG (vel GZ). AC :: AC. ZK, & per K, intra angulum DAR describatur *hyperbola* KYK; tum sint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verùm adnotetur præterea.

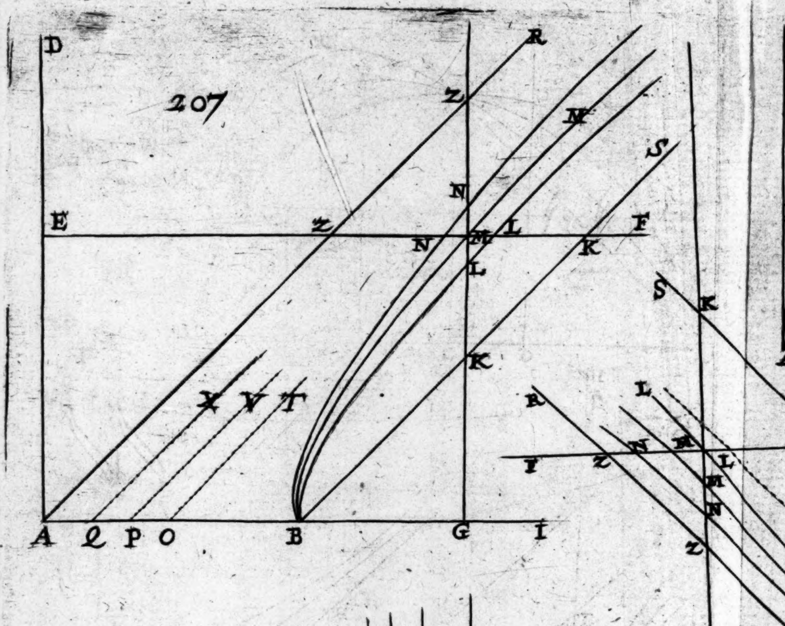
Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam seriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad sextam.

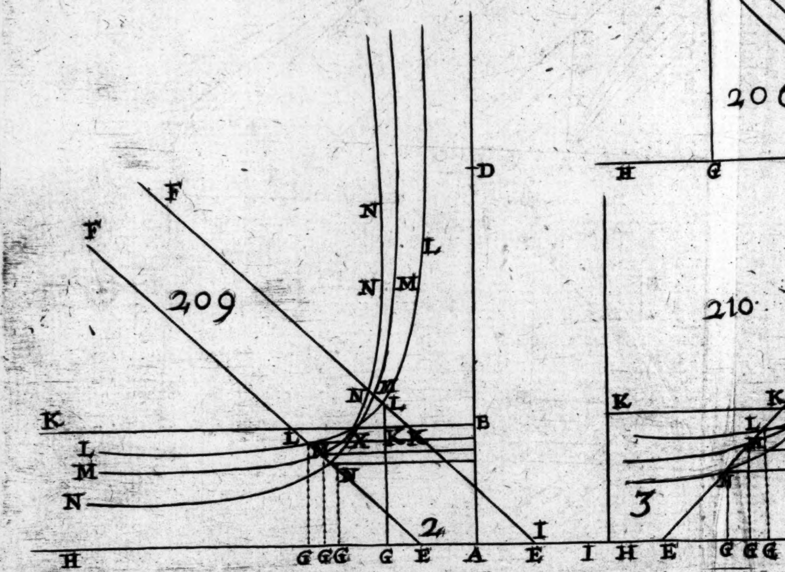
2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si A$\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$, & ordinetur φY; erit Y communis linearum intersectio, seu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK est infinita, in secundo AC est maxima; in tertio si fuerit AP $= \sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una semper major est quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto si AQ $= \sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

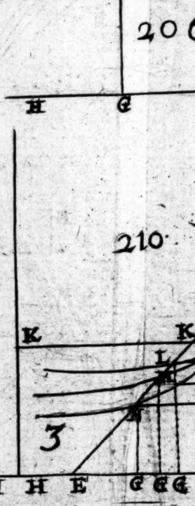
4. Con-



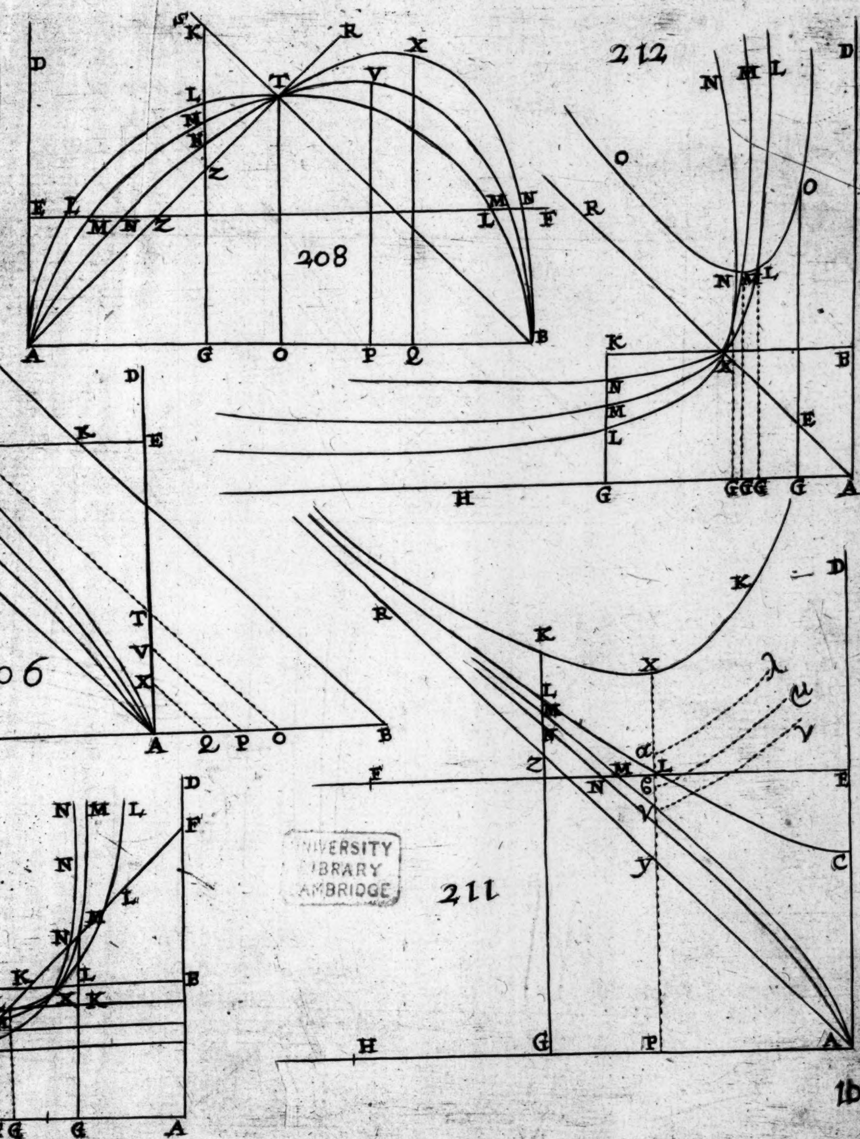
207
D
R
Z
M
S
N
E
Z
N
M
L
F
K
L
S
K
K
X
V
T
R
L
I
Z
N
M
L
M
N
Z
A
Q
P
O
B
G
I
206



D
H
G
F
F
N
L
N
M
209
210
N
M
L
K
B
K
L
N
X
K
K
L
M
N
N
2
I
H
G
G
G
G
E
A
E
I
H
E
G
G
G



K
K
L
M
N
3


208
212
06
211

4. Consequentèr in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta E F curvas supergreditur, nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est $AH = AG$.

6. Curva C Y H est *Circuli quadrans*, reliquæ A M H, A N H quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva H L L est *hyperbola æquilatera*, cujus axis A H; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + ba + cc = nn.$$

$$a^3 + baa + cca = n^3.$$

$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta B A H indefinitè protensâ capiatur $AB = b$; & in A D ad B H perpendiculari sit $AC = c$; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ G Y ad A H perpendiculari quæ ipsam B S secet in Y; fiat A G . A C :: A C . Y K; & per K intra angulum D V S describatur *hyperbola* K K K; sint demum curvæ C L L, AMM, A N N tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ satisfacient negotio. Nam est $GK = a + b + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + ba + cc$; & $GM\,cub = a^3 + baa + cca$; & $GNqq = a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva C L L est pars *hyperbolæ æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipsam A B bisecans; & siquidem $AC \sqsubset AO$, est O H (ad A B perpendicularis, &) $= \sqrt{ACq - AOq}$ ejus *semiaxis*; sin $AC \sqsupset AO$, ejus axis est $OI = \sqrt{AOq - ACq}$. reliquæ verò curvæ A M M, A N N sunt *hyperboliformes*.

 2. Hinc

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n \supset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta EF curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4. \&c.$$

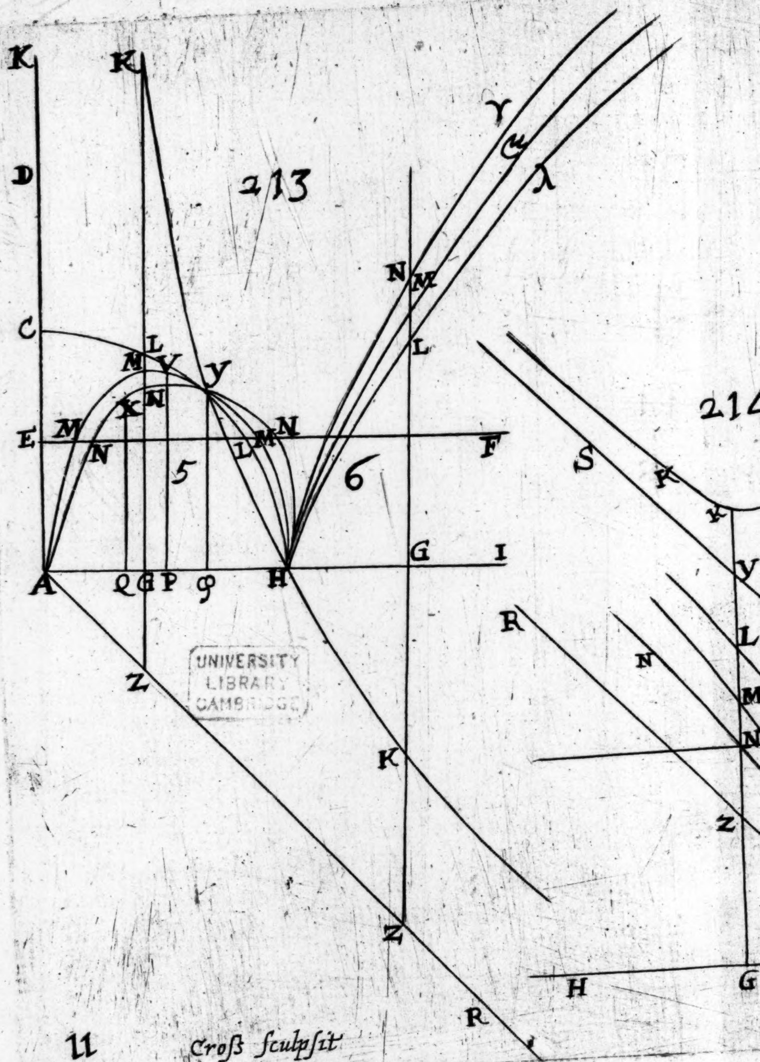
Fig. 215. In recta AI sumatur $AB = b$; & in AD ad ipsam AI perpendiculari sit $AC = c$; fiant autem anguli IAR, ABS semirecti, ducatúrque recta ZGK ad AI utcunque perpendicularis, ipsam BS secans ad ξ; & sit AG. AC :: AC. ξK; tum per K intra angulum DSB describatur *hyperbola* KYHK; sint denuò curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter AG, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

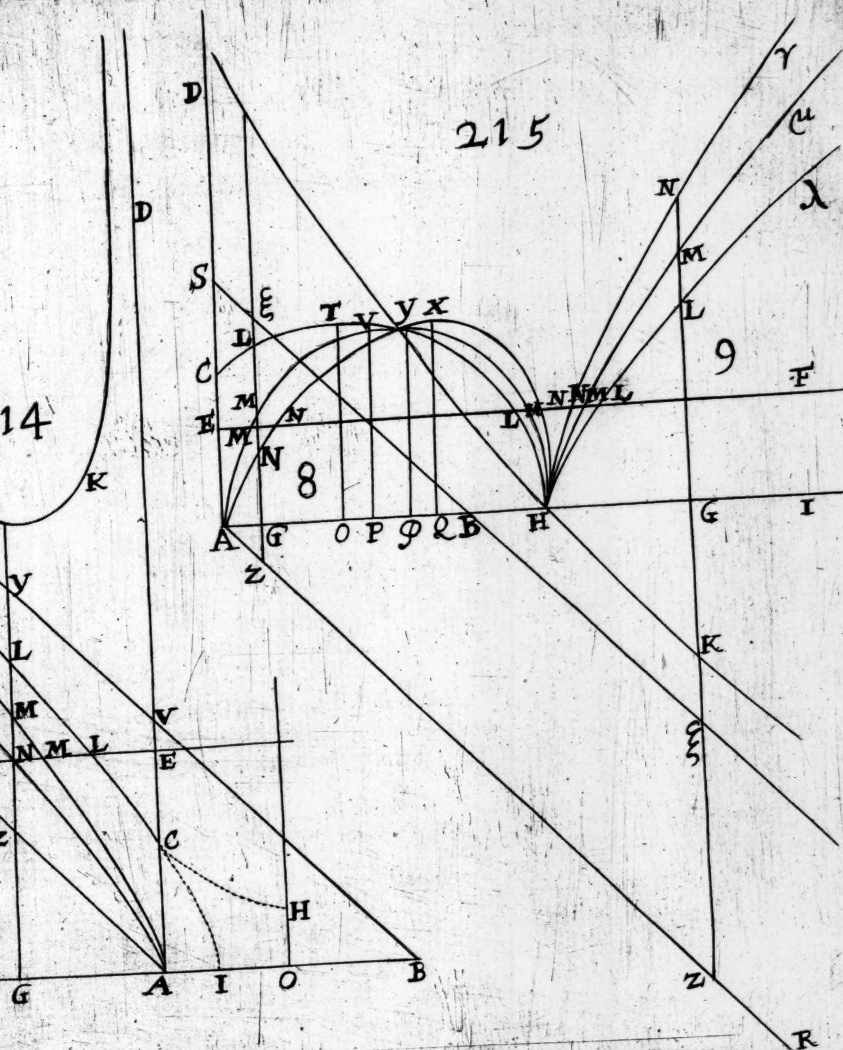
1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò HLλ, HMμ, HNν, ad nonam.

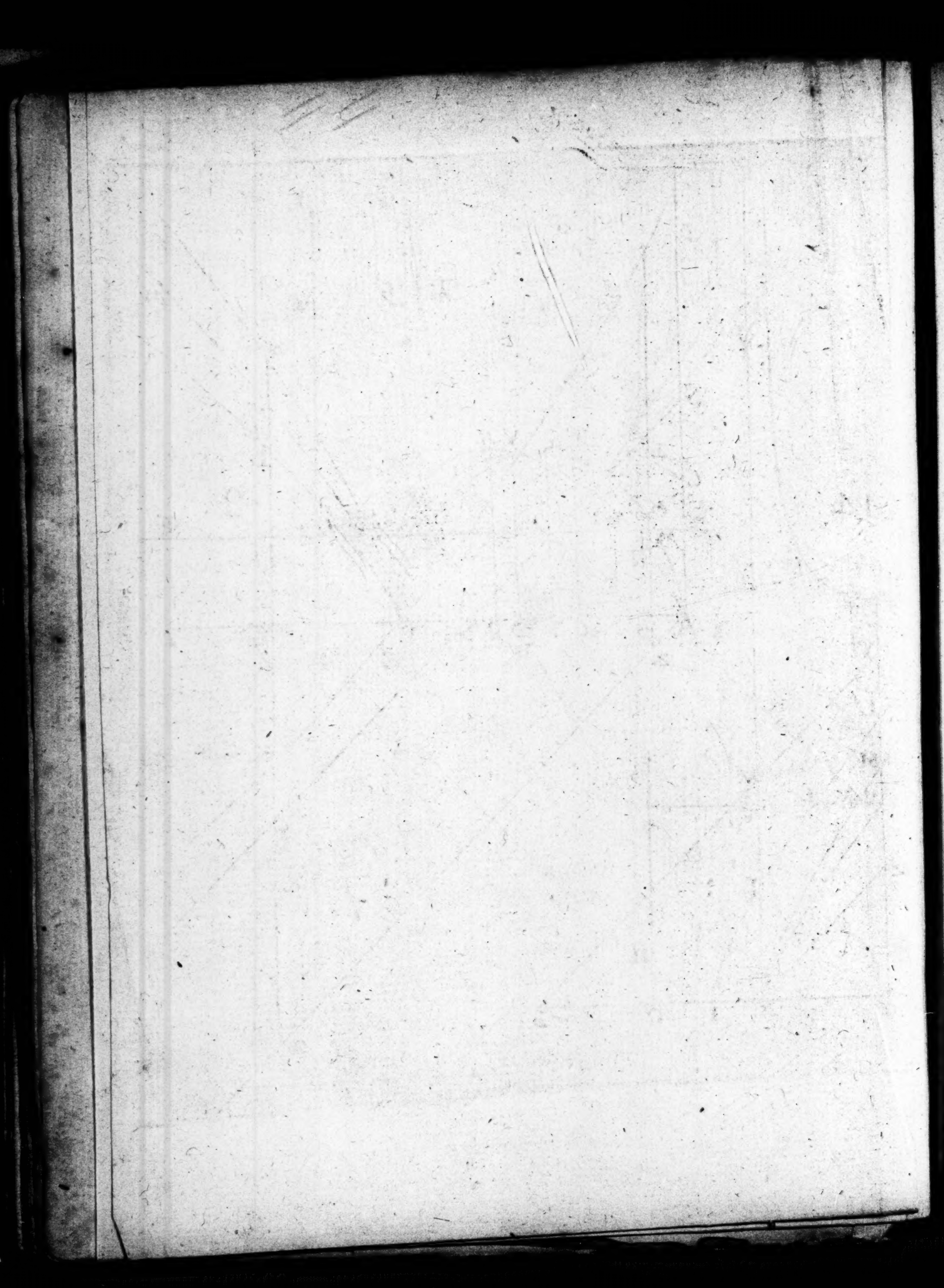
2. Quoad octavam seriem, si bisecetur AB in O, & ordinetur OT ad curvam CLH est OT maxima; sin fiat $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9}} +$

cc



213
5
6
214
11
Croß sculpsit


215
14
8
9
D
D
S
C
E
A
G
O
P
φ
Q
B
H
G
I
F
T
V
y
X
N
M
L
K
Z
R
ξ
γ
λ
V
E
C
H
A
I
O
B
G



$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{1}{8} b + \sqrt{\frac{9}{64} bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam ANH erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{3}{8} b + \sqrt{\frac{9}{64} bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n = A\varphi$, erit $A\varphi$ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est $AH = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \text{ \&c.}$$

Fig. 216. In recta B A H sumatur B A $= b$; & in A D ad A H perpendiculari sit A C $= c$; sintque anguli H A R, H B S semirecti; tum utcunque ductâ rectâ G K ξ ad A H perpendiculari (quæ ipsam B S secet in ξ; sit A G . A C : : A C . ξ K; & per K intra *asymptotos* V D, V S describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ H L λ, H M μ, H N ν ad decimam seriem pertinent; reliquæ C L H, A M H, A N H ad undecimam.

2. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, & curva C L H *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde A H $= \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : - \frac{b}{2}$)

3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. A φ $= \frac{cc}{b}$; & A ψ $= \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : - \frac{b}{4}$; & ordinentur φ Y, ψ X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata A C est maxima; sin A P $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : - \frac{b}{3}$; & à P ad curvam A M H ordinetur P γ, hæc maxima erit; item si A Q $= \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : - \frac{3b}{8}$; & à

Q

Q ad curvam A N H ordinetur Qδ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit A B = *b*; & A C = *c*; & angulus A B S semirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: AC. ξ K; & K H K I K *hyperbola asymptotis* S A, S B descripta; denuò curvæ CLHLILλ, AMHMIMμ, ANHNIN, tales sint, ut inter AG, G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N, ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ HLI, HMI, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B bisecans) & *semiaxis* O H (vel O I) = √ A O q. — A C q reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8cc}$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item si $AQ = \frac{3}{8}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc suffecerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magìs generales.

Fig. 218.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In rectâ indefinitè protensâ HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hìc $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à purâ quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subdititiæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa * - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa * + n^3 = 0$; & hujus, † uti suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit $a^3 - baa = n^3$; vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie 3.*

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ità determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Construatur æquatio planè similis propositæ, easdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa\begin{matrix}+ba+bf\\+fa+ff\end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa\begin{matrix}-ba+bf\\-fa+ff\end{matrix} = 0$; hujus æquationis

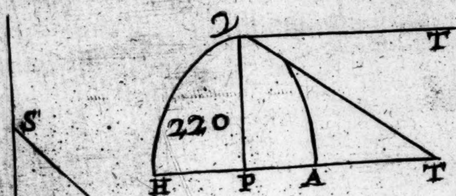
veræ radices propositæ falsas exhibent. Hic insuper modus æquationis propositæ, quatenus illa ex aliarum in se ductu provenit, constitutionem ostendit.

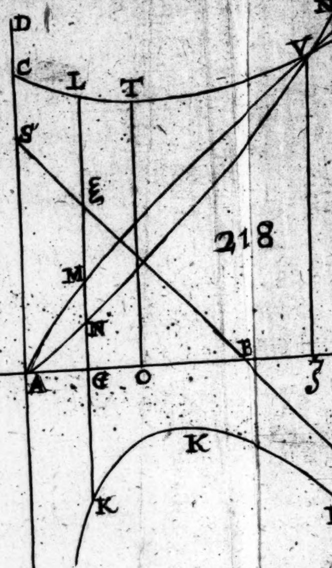
4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque serie ponendo (quovis in gradu seriei) fore $n = 0$; ut in octava serie sit $ba - aa + cc = 0$; adeóque $cc = aa - ba$, erit $a \left(= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima sit $aa - ba + cc = 0$; unde $cc = ba - aa$; erit $a \left(= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - cc}\right)$ *radix maxima*; & $a \left(= \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - cc}\right)$ *radix minima*.

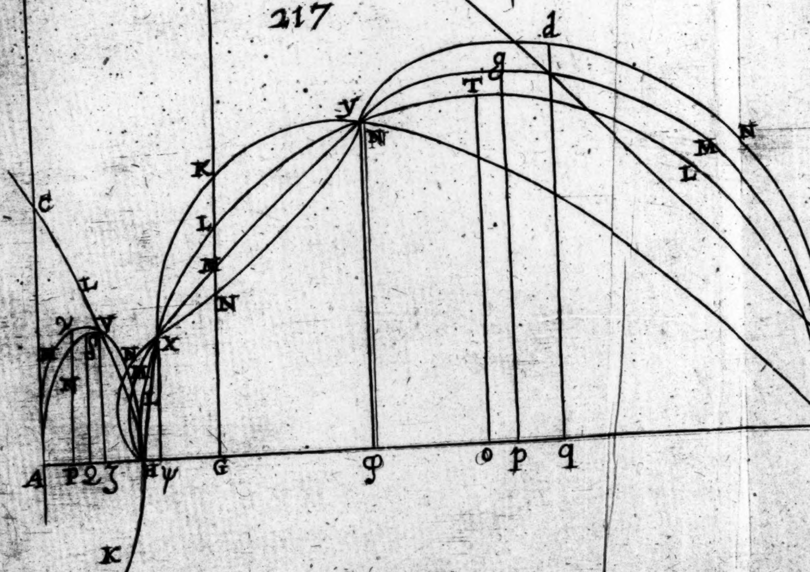
5. *Curvarum nodi*, vel *intersectiones* innotescunt, cujusvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a = n$; ut in octava Serie, ubi $ba - aa + cc = nn$, sit $a = n$; ergò $ba - aa + cc = aa$; vel $cc = 2aa - ba$; vel $\frac{cc}{2} = aa - \frac{ba}{2}$; quare $a = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa - ba + cc = nn = aa$; erit ideò $cc = ba$; ac inde $a = \frac{cc}{b}$.

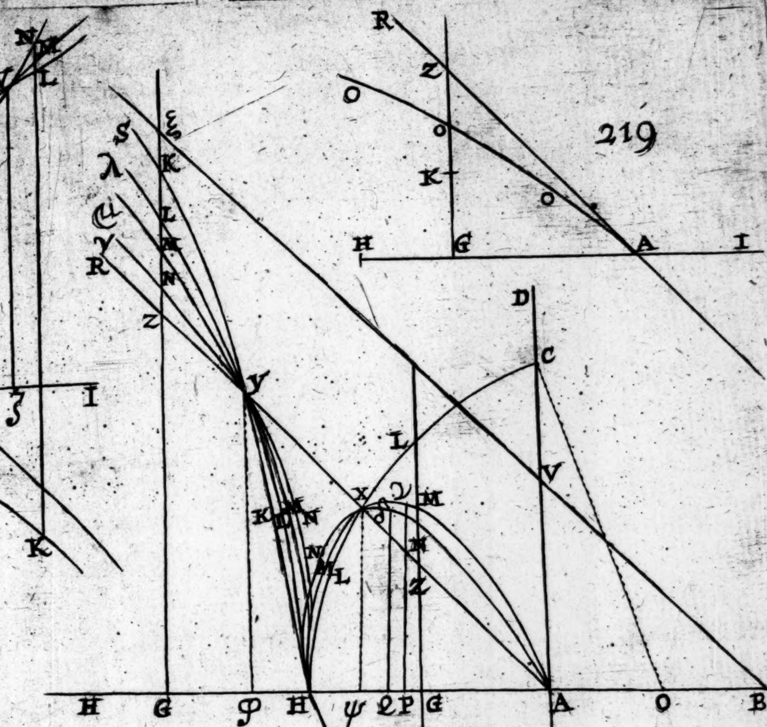
6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodísque passim notis investigantur; ego simul illas atque curvarum *tangentes* unâ operâ sic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúsque gradum, cujus æquatio est $cca - baa - a^3 = n^3$; posito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de supra monstratis) fore $PT = \frac{3n^3}{3aa + 2ba - cc}$, tum considero, si ordinata P γ sit maxima, fore tangentem ipsi H A parallelam, seu rectam P T esse infinitam; quare cùm sit $n^3 = PT \times : 3aa + 2ba - cc$; & n sit finita, patet esse $3aa + 2ba - cc = 0$; vel $aa + \frac{2}{3}ba = \frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{: \frac{bb}{9} + \frac{cc}{3} :} - \frac{b}{3} = a = AP$. Fig. 220.

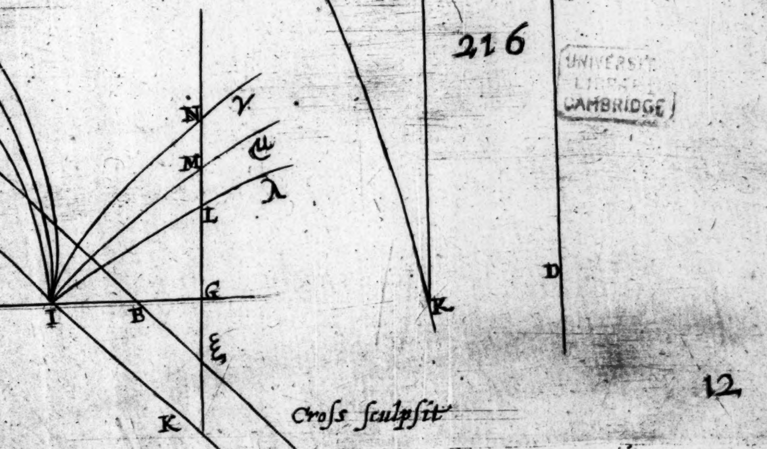
7. Adnoto demùm è *maximis & minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe si reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipsius A P in exemplo proximè superiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a substituatur, si quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* construi nequit


220
T
H
P
A
T


D
C
L
T
V
S
218
M
N
A
O
B
K
K


S
D
217
d
g
T
y
K
L
N
M
C
L
V
X
A
G
φ
o
p
q
K





Cross sculpsit

nequit, aut saltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & species præ se ferunt. Eadem *minimarum* est ratio; tantùm ibi proveniens *summa* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmissis. Hîc itaque subsisto.

Laus DEO Optimo Maximo.



FINIS.

ERRATA.

P*Ag*.. 5. *Lin*. 20. ad testatur, *lege* testatam facit. *p*. 9. *l*. 3. *leg*. velocitatum. *p*. 14. *l*. 36. *leg*. plana. *p*. 17. *l*. 24. *leg*. prohibetur. *p*. 18. *l*. 32. *leg* à puncto B. *p*. 19. *l*. 4. *leg*. B D, G K. *p*. 22. 10. *leg*. VD multitudo censeri. *p*. 23. *l*. 7. *leg*. radius ad *p*. 23. *l*. 10. *leg*. nec non, datis. *p*. 24. *l*. 2. *leg*. effectæ. *p*. 24. *l*. 24. *leg*. quidem ut punctum. *p*. 30. *l*. 18. *leg*. protracta. *p*. 32. *l*. 5, 6. *leg*. tangentes (una — hujus) *p*. 35. *l*. 5. *leg*. tangant. *p*. 35. *l*. 6. *leg*. M P. *p*. 35. *l*. 12. *leg*. T P. *p*. 37. *l*. 2. *leg*. divisâ. *p*. 40. *l*. 4. *leg* arcus N H major est ipsâ. *p*. 41. *l*. 32. *leg*. versari. *p*. 43. *l*. 15. *leg*. aliam H R. *p*. 47. *l*. 26. Fig. 39, & 40. *pag*. 49. *l*. 16. *leg*. 2 fxy. *p*. 52. *l*. 3. *dele* Fig. 51, 52. *p*. 52. *l*. 6. *leg*. Fig. 51, 52. *pag*. 52 *l*. 24. *leg*. Fig. 53. *p*. 55 *l*. 15. *dele* se intersecantes in X. *p*. 57. *l*. 25. *leg*. δ P. *p*. 58. *l*. 19. *leg*. F B F ipsi K E K. *p*. 59. *l*. 2. *leg*. K E K. *p*. 61. *l*. 26. *leg*. punctum. *p*. 62. *l*. 27. *leg*. K O $\sqsubset$ K A. *p*. 63. *l*. 16. *leg*. contactum. *p*. 64. *l*. 22. *leg*. Fig. 80. *p*. 65. *l*. 4. *leg*. συνολεχίαν. *p*. 67. *l*. 11. *leg* tum alia. *p*. 67. *l*. [illegible] *leg*, Q O q = Z q. *p*. 68. *l*. 7. *leg*. F Q. *p*. 70. *l*. 22. *leg*. Fig. 95. *p*. 76. *l*. 3. *leg*. H T (*a*) $\sqsubset$ G A. *p*. 76. *l*. 11 *leg*. D F. *p*. 76. *l*. 18 *leg*. P K. *p*. 76 *l*. 20. *leg*. tanget recta RFK. *p*. 78. *l*. 24. *leg*. infra. *p*. 79. *l*. 18. *dele* Fig. 113. *p*. 79. *l*. 31. *leg*. Fig. 113. *p*. 86. *l*. 31. *leg*. $\sqrt{VCZq} = CG$. *p*. 87 *l*. 14. *leg*. $D\downarrow^3 = \sqrt{\frac{32}{243}}$. *pag*. 91. *l*. 9. *leg*. in recta. *p*. 91. *l*. 23. *leg*. æquale rectangulo ex. *p*. 91. *l*. 24. *leg*. P, Q. *p*. 96. *l*. 15. *leg*. C A. C D. *p*. 96. *l*. 22. *leg*. $AD = \frac{5}{2} CA$. *p*. 97. *l*. 2. *leg*. totam. *p*. 102. *l*. 25. *leg*. O P ad O T. *pag*. 106. *l*. 10. *leg*. applicatis, *p*. 106. *l*. 19. *leg*. semi-axis. *p*. 112. *l*. 2. *leg*. applicatis. *p*. 114. *l*. 22. *leg*. $\frac{PLQO}{2\,Rad.}$ *p*. 114. *l*. 26. *leg*. propositum *p*. 116. *l*. 5. *leg*. R. S. *p*. 122. *l*. 22. *leg*. Fig. 183. *p*. 123. *l*. 1. *leg*. Fig. 184 *p*. 125. *l*. 4. *leg*. D M = D I. *p*. 128. *l*. 7. *leg*. Fig. 195. *p*. 128. *l*. 11. *dele* Fig. 195. *p*. 128. *l*. 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ *p*. 129. *l*. 13. emerget undecima Lect. *p*. 136. *l*. 20. *leg*. hyperbolæ. *pag*. 139. *l*. 3. *leg*. nam. *p*. 140. *l*. 1. *leg*. [illegible] à *p*. 105. ad *p*. 112. *l*. 1. *leg*. Lect. XII.]



UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\pi}$, nec adponitur ἔκθεσις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.

